

問1	(1)	$-1 < x < 4$	(2)	$0 < a \leq 1$
問2	(1)	9	(2)	-3
問3	(1)	$y = 2x - 2$	(2)	8

問1

(1) $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ より, 相加・相乗平均の関係から

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \quad (\text{等号は, } x=0 \text{ のとき成り立つ})$$

よって, $t \geq 2$

(2) $t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$ より,

$$f(x) = (t^2 - 2) - 2at + 12 - a^2 = t^2 - 2at + 10 - a^2$$

(3) $a=1$ のとき, (2)を用いて,

$$4(t^2 - 2t + 9) = 41$$

$$4t^2 - 8t - 5 = 0$$

$$(2t-5)(2t+1) = 0$$

$$t \geq 2 \text{ より, } t = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$2(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$(2^x - 2)(2 \cdot 2^x - 1) = 0$$

$$2^x = 2, \frac{1}{2} \quad \therefore x = \pm 1$$

問2

(1) 問1(1), (2)より, $g(t) = t^2 - 2at + 10 - a^2$ とおくと,

$$g(t) = (t-a)^2 + 10 - 2a^2$$

$t \geq 2$ より

$a \geq 2$ のとき, $t=a$ のとき最小。

$a < 2$ のとき, $t=2$ のとき最小。

よって, 求める最小値は,

$$\begin{cases} a \geq 2 \text{ のとき, } 10 - 2a^2 & (t=a \text{ のとき}) \\ a < 2 \text{ のとき, } -a^2 - 4a + 14 & (t=2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) $f(x)=0$ が実数解を持たないのは, $g(t)=0$ が $t \geq 2$ を満たす実数解を持たないことである。

つまり, $t \geq 2$ における $g(t)$ の(最小値) >0 である。

(1)より,

$a \geq 2$ のとき,

$$t=a \text{ のとき最小なので, } g(a) = 10 - 2a^2 > 0$$

$$\text{これを解くと, } -\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$$

$$a \geq 2 \text{ だから, } 2 \leq a < \sqrt{5} \quad \dots\dots ①$$

$a < 2$ のとき,

$$t=2 \text{ のとき最小なので, } -a^2 - 4a + 14 > 0$$

$$\text{これを解くと, } -2 - 3\sqrt{2} < a < -2 + 3\sqrt{2}$$

$$a < 2 \text{ だから, } -2 - 3\sqrt{2} < a < 2 \quad \dots\dots ②$$

①, ②より, 求める a の値の範囲は,

$$-2 - 3\sqrt{2} < a < \sqrt{5}$$

問1

$$(1) (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \text{ より, 中心は } C(3, 1), \text{ 半径は } \sqrt{5}$$

$$(2) m(x+2) - (y-1) = 0$$

これは, どのような実数 m に対しても成り立つので,

$$x+2=0 \text{ かつ } y-1=0 \therefore x=-2, y=1 \text{ よって, } P(-2, 1)$$

問2

(1) 接線は, $mx - y + 2m + 1 = 0$ と表される。

$$\text{円①に接するので, } \frac{|3m-1+2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5} \therefore |5m| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

$$\text{両辺を平方して, } 4m^2 = 1 \therefore m = \pm \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} \text{ のとき, 接線は } y = \frac{1}{2}x + 2$$

この接線に垂直で, 円 C の中心を通る直線は, $y = -2x + 7$

これと接線との交点が接点なので, 連立して $x=2, y=3$

$$m = -\frac{1}{2} \text{ のとき, 接線は } y = -\frac{1}{2}x$$

この接線に垂直で, 円 C の中心を通る直線は, $y = 2x - 5$

これと接線との交点が接点なので, 連立して $x=2, y=-1$

Q, R の定め方から, $Q(2, 3), R(2, -1)$

<接線の別解>

$$y = mx + 2m + 1 \text{ と } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \text{ より, } (x-3)^2 + (mx+2m)^2 = 5$$

$$\therefore (m^2+1)x^2 + 2(2m^2-3)x + 4m^2 + 4 = 0$$

$$\text{判別式を } D \text{ とすると, } \frac{1}{4}D = (2m^2-3)^2 - 4(m^2+1)^2 = 0 \therefore m^2 = \frac{1}{4} \therefore m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{接線は, } y = \frac{1}{2}x + 2, y = -\frac{1}{2}x$$

<接点の別解>

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ と } x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \text{ より } x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 - 6x - 2\left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 5 = 0$$

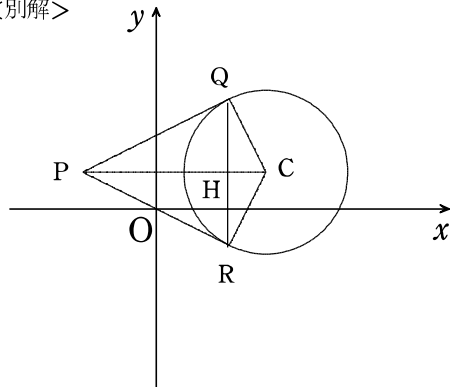
$$\text{式を整理して, } (x-2)^2 = 0 \therefore x=2 \text{ よって } (2, 3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x \text{ と } x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \text{ より } x^2 + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 - 6x - 2\left(-\frac{1}{2}x\right) + 5 = 0$$

$$\text{式を整理して, } (x-2)^2 = 0 \therefore x=2 \text{ よって } (2, -1)$$

$Q(2, 3), R(2, -1)$

<別解>



$$CP = 5, CQ = \sqrt{5} \text{ より, } PQ = \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$$

PCとQRとの交点をHとすると,

$$\angle PQC = \angle PHQ = 90^\circ, \angle CPQ = \angle QPH \text{ より}$$

$$\triangle PCQ \sim \triangle PQH$$

$$PQ : PC = 2\sqrt{5} : 5 \text{ より}$$

$$PH = \frac{2}{\sqrt{5}} PQ = 4, QH = \frac{2}{\sqrt{5}} CQ = 2$$

よって, $Q(2, 3), R(2, -1)$

(2) $\triangle PCQ \equiv \triangle PCR$ かつ $\angle PQC = \angle PRC = 90^\circ$ より,

四角形 $PRCQ$ は直線 PC に関して対称で, 4 辺 PQ, PR, CQ, CR に接する円が最大の円となる。

この円の中心は直線 PC 上にあるので, $(a, 1)$ とおける。

中心から 2 直線 PQ, CQ までの距離は半径で等しいので

$$\frac{|a-2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2a+1-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\therefore |a+2| = |2a-6|$$

$$\therefore a+2 = \pm(2a-6)$$

$$\therefore a = \frac{4}{3}, 8$$

$$-2 < a < 3 \text{ より, } a = \frac{4}{3}$$

よって, 求める中心は, $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$

(3) 2 辺 PQ, PR および円に外接するものが最大となる。

この円の中心は直線 PC 上にあるので, $(b, 1)$ とおける。

中心から直線 PQ , 円までの距離は半径で等しいので,

求める半径を r ($r > 0$) とおくと,

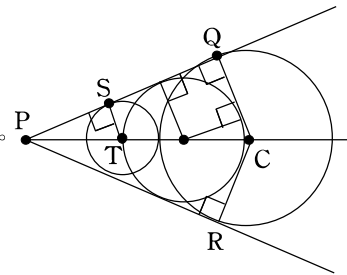
$$\begin{cases} r = \frac{|b-2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \\ r + \sqrt{5} = 3-b \end{cases}$$

$$b = 3 - \sqrt{5} - r \text{ より } \sqrt{5}r = |5 - \sqrt{5} - r|$$

$$\therefore \sqrt{5}r = 5 - \sqrt{5} - r, -5 + \sqrt{5} + r$$

$$\therefore r = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}, -\sqrt{5}$$

$$r > 0 \text{ より, } r = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}$$



<別解>

2つの接線かつ円Cに外接する円が最大の円となる。

2つの接線の1つの接点をSとし, 中心をTとすると,

$\triangle PCQ \sim \triangle PTS$ だから, $QC : ST = PC : PT$

求める半径を r ($r > 0$) とおくと,

$$PC = \sqrt{(3+2)^2 + (1-1)^2} = 5, PT = 5 - (\sqrt{5} + r)$$

$$\sqrt{5} : r = 5 : 5 - (\sqrt{5} + r) \therefore 5r = 5\sqrt{5} - 5 - \sqrt{5}r$$

$$\therefore \sqrt{5}r + r = 5 - \sqrt{5}$$

$$\therefore r = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}$$

問1

p_1 は1の袋を選ばない場合である。 $\therefore p_1 = \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{4}{5}$

p_2 は「1回目に1のボールが1の袋にあり, 2回目に1の袋を選ばない場合」と
「1回目に1のボールが1の袋以外の袋にあり, 2回目に1とそれ以外の袋で1が書か
れたボールが入った袋を選ぶ場合」である。

この2つの場合は互いに排反だから,

$$\begin{aligned}\therefore p_2 &= \frac{4}{5} \times \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2} + \frac{1 \times {}_9C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{1}{{}_{10}C_2} \\ &= \frac{16}{25} + \frac{1}{225} = \frac{145}{225} = \frac{29}{45}\end{aligned}$$

問2

$(n+1)$ 回目に1のボールが1の袋にあるのは,

「 n 回目に1のボールが1の袋にある。」または「 n 回目に1のボールが1の袋以外の袋にある。」の場合がある。

(ア) n 回目に1のボールが1の袋にあるとき

$(n+1)$ 回目に1の袋を選ばない場合である。

$$\therefore p_n \times \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{4}{5} p_n$$

(イ) n 回目に1のボールが1以外の袋にあるとき

$(n+1)$ 回目に, 1の袋とそれ以外の袋で1が書かれたボールが入った袋を選ぶ場合である。

$$\therefore (1-p_n) \times \frac{1}{{}_{10}C_2}$$

$$\begin{aligned}\text{(ア) と (イ) は互いに排反だから, } p_{n+1} &= \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{45} (1-p_n) \\ &= \frac{7}{9} p_n + \frac{1}{45}\end{aligned}$$

問3

$$p_{n+1} = \frac{7}{9} p_n + \frac{1}{45} \text{ より } p_{n+1} - \frac{1}{10} = \frac{7}{9} \left(p_n - \frac{1}{10} \right)$$

数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{10} \right\}$ は, 初項 $p_1 - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$, 公比 $\frac{7}{9}$ の等比数列だから,

$$p_n - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} \left(\frac{7}{9} \right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \left(\frac{7}{9} \right)^{n-1}$$

問1

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \quad (C \text{は定数})$$

問2

$$y' = e^x + x e^x = (x+1)e^x \text{ より, } y' = (x+1)e^x = 0 \text{ とすると, } x = -1$$

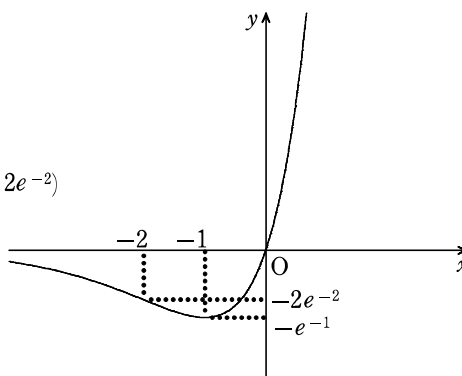
$$y'' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x \text{ より, } y'' = (x+2)e^x = 0 \text{ とすると, } x = -2$$

増減, 凹凸を調べると

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\curvearrowright$	$-2e^{-2}$	$\curvearrowleft$	$-e^{-1}$	$\nearrow$

 $x = -1$ のとき極小値 $-e^{-1}$, 変曲点 $(-2, -2e^{-2})$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ より x 軸が漸近線となる。

グラフは右の図のとおり。



問3

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax^2 + bx + c)e^{2x} \text{ より, } f'(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} \\ &= \{2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c\}e^{2x} \end{aligned}$$

$$\text{これが } f'(x) = x^2 e^{2x} \text{ と一致するから, } \{2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c\}e^{2x} = x^2 e^{2x}$$

すべての実数 x について成り立つから,

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \quad \therefore a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$$

問4

2つの曲線①, ②の共有点の x 座標を求めると,

$$x e^x = e^x \quad \therefore (x-1)e^x = 0 \quad e^x > 0 \text{ より } x = 1$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, } e^x \geq x e^x \text{ より,}$$

求める体積を V とすると,

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x e^x)^2 dx$$

$$\text{ここで, 問3より } \int x^2 e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C \quad (C \text{は定数})$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \pi \left[\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \pi (e^2 - 1) \end{aligned}$$

