

1

問1

- (1) 生徒①の得点 a は生徒③の得点 b より1点高いので, $a = b + 1 \cdots \textcircled{1}$

$$\text{表の6人の平均点が5点だから, } \frac{a+6+b+3+4+4}{6} = 5 \therefore a+b=13 \cdots \textcircled{2}$$

①と②より, $a=7, b=6$

- (2) 表の6人の分散は, $\frac{(7-5)^2+(6-5)^2+(6-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2}{6} = \frac{12}{6} = 2$

- (3) 新たに加えた4人の分散を p とする。

10人の得点の分散は, 加えた4人の得点の分散より0.3小さくなるから, (2)の分散を用いて

$$\frac{2 \times 6 + 4 \times p}{10} = p - 0.3$$

$$\therefore 12 + 4p = 10p - 3 \quad \therefore p = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2.5$$

問2

$$\begin{aligned} (1) \log_4 12 &= \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 2^2} \\ &= \frac{2a+b}{2a} \end{aligned}$$

$$(2) \textcircled{7} \text{ (左辺)} = \log_2 3$$

$$\text{(右辺)} = \frac{\log_2 A}{\log_2 4} = \frac{\log_2 A}{2} = \log_2 A^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{よって, } A^{\frac{1}{2}} = 3 \quad \therefore A = 9$$

<別解>

$$\begin{aligned} \frac{\log_a 3}{\log_a 2} &= \frac{\frac{\log_4 3}{\log_4 a}}{\frac{\log_4 2}{\log_4 a}} \\ &= \frac{\log_4 3}{\log_4 2} = \frac{\log_4 3}{\frac{1}{2} \log_4 4} \\ &= 2 \log_4 3 = \log_4 9 \\ \therefore A &= 9 \end{aligned}$$

<別解>

$$\begin{aligned} \log_4 A &= \frac{\log_a A}{\log_a 4} = \frac{\log_a A}{2 \log_a 2} = \frac{\log_a \sqrt{A}}{\log_a 2} \\ \therefore \frac{\log_a 3}{\log_a 2} &= \frac{\log_a \sqrt{A}}{\log_a 2} \\ \therefore \sqrt{A} &= 3 \quad \therefore A = 9 \end{aligned}$$

問3

- (1) 5色で5つの場所を塗り分けるから
5!=120 (通り)
- (2) 4色で塗り分けるとき、
同色を塗る部分の組合せは2通り。
よって、5×2×₄P₃=240 通り。

1

問1	(1)	$a=7, b=6$ 7, 6 も 可	(2)	2	(3)	2.5
問2	(1)	$\frac{2a+b}{2a}$	(2)	9		
問3	(1)	120通り (120 も 可)	(2)	240通り (240 も 可)		

問1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad k &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (-x^2 + 3kx) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3k}{2}x^2 \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{3k}{2} \\
 \therefore k &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$(2) (1) \text{より, } f(x) = -x^2 + 2x \quad y = -x^2 + 2x = 0 \text{ とすると}$$

x 軸との共有点の x 座標は, $x=0, 2$

$0 \leq x \leq 2$ のとき, $y = f(x) \geq 0$ より

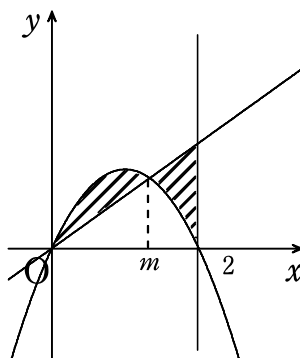
$$\begin{aligned}
 \text{面積は, } \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

問2

$$(1) \quad -x^2 + 2x = (2-m)x \text{ とすると, ①と②の共有点の } x \text{ 座標は, } x=0, m$$

$m \leq x \leq 2$ のとき, $-x^2 + 2x \leq (2-m)x$ より

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_m^2 \{(2-m)x - (-x^2 + 2x)\} dx \\
 &= \int_m^2 (x^2 - mx) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} \right]_m^2 \\
 &= \frac{1}{6}m^3 - 2m + \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$



$$(2) \quad 0 \leq x \leq m \text{ のとき, } (2-m)x \leq -x^2 + 2x \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^m \{-x^2 + 2x - (2-m)x\} dx \\
 &= \int_0^m (-x^2 + mx) dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} \right]_0^m \\
 &= -\frac{m^3}{3} + \frac{m^3}{2} = \frac{1}{6}m^3
 \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{6}m^3 - 2m + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}m^3 - 2m + \frac{8}{3}$$

$$S' = m^2 - 2 = 0 \text{ とすると, } m = \pm\sqrt{2}$$

$$0 < m < 2 \text{ より } m = \sqrt{2}$$

S の増減を調べると,

m	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
S'		-	0	+	
S	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	最小	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

よって, $m = \sqrt{2}$ のとき最小値 $\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

問1

(1) 目の和が5となるのは、目が(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の4通りあるから、

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6^2} = \frac{2}{27}$$

(2) Aが5点となるのは、(赤色のカードを引いて目の和が5) または (白色のカードを引いて目の積が5)。

目の積が5となるのは、目が(1, 5), (5, 1) の2通りある。

$$\text{互いに排反かつ(1)より, } \frac{2}{27} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6^2} = \frac{5}{54}$$

問2

AもBも同色で、Aが5点で勝つのは、

(i) AもBも赤色のカードを引いて、Aが5点、Bが4点以下。

(ii) AもBも白色のカードを引いて、Aが5点、Bが4点以下。

(i) のとき、目の和が4点以下となるのは、目が(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1) の6通り。

$$\text{よって確率は, } \frac{4}{6} \times \frac{4}{6^2} \times \frac{3}{5} \times \frac{6}{6^2} = \frac{1}{135}$$

(ii) のとき、目の積が4点以下となるのは、目が(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1) の8通り。

$$\text{よって確率は, } \frac{2}{6} \times \frac{2}{6^2} \times \frac{1}{5} \times \frac{8}{6^2} = \frac{1}{1215}$$

$$(i), (ii) \text{ は互いに排反なので, } \frac{1}{135} + \frac{1}{1215} = \frac{2}{243}$$

問3

Aが5点で勝つ事象をX, AもBも同色のカードを引く事象をYとすると、

$$\text{求める確率は } P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}.$$

Aが5点で勝つのは、

(ア) Aが赤色のカードを引いて5点、Bが赤色のカードを引いて4点以下。

(イ) Aが赤色のカードを引いて5点、Bが白色のカードを引いて4点以下。

(ウ) Aが白色のカードを引いて5点、Bが赤色のカードを引いて4点以下。

(エ) Aが白色のカードを引いて5点、Bが白色のカードを引いて4点以下。

それぞれの確率を求めると、

$$(ア) \text{ は, } \frac{4}{6} \times \frac{4}{6^2} \times \frac{3}{5} \times \frac{6}{6^2} = \frac{1}{135} \quad (イ) \text{ は, } \frac{4}{6} \times \frac{4}{6^2} \times \frac{2}{5} \times \frac{8}{6^2} = \frac{8}{1215}$$

$$(ウ) \text{ は, } \frac{2}{6} \times \frac{2}{6^2} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{6^2} = \frac{1}{405} \quad (エ) \text{ は, } \frac{2}{6} \times \frac{2}{6^2} \times \frac{1}{5} \times \frac{8}{6^2} = \frac{1}{1215}$$

(ア), (イ), (ウ), (エ) は互いに排反なので、

$$P(X) = \frac{1}{135} + \frac{8}{1215} + \frac{1}{405} + \frac{1}{1215} = \frac{21}{1215} = \frac{7}{405}$$

$$\text{次に, 問2より, } P(X \cap Y) = \frac{2}{243}$$

$$\therefore P_X(Y) = \frac{\frac{2}{243}}{\frac{7}{405}} = \frac{10}{21}$$

問1

$$a_2 = 6a_1 + 2b_1 = 16$$

$$b_2 = -2a_1 + 2b_1 = 0$$

問2

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 4(a_n + b_n) \text{ より, } x_{n+1} = 4x_n$$

数列 $\{x_n\}$ は初項 $x_1 = a_1 + b_1 = 4$, 公比4の等比数列だから,

$$x_n = 4^n$$

問3

$$y_n = \frac{a_n}{4^n} \text{ より, } y_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{6a_n + 2b_n}{4^{n+1}}$$

$$\text{問2より, } b_n = 4^n - a_n \text{ だから } y_{n+1} = \frac{6a_n + 2(4^n - a_n)}{4^{n+1}} = \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{2} = y_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{y_n\}$ は初項 $y_1 = \frac{a_1}{4} = \frac{1}{2}$ 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列だから,

$$y_n = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

<関係式の別解>

$$\text{問2より } b_n = 4^n - a_n \text{ だから } a_{n+1} = 6a_n + 2b_n = 6a_n + 2(4^n - a_n)$$

$$\therefore a_{n+1} = 4a_n + 2 \cdot 4^n$$

$$\text{両辺を } 4^{n+1} \text{ で割ると, } \frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{2} \quad \therefore y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}$$

問4

$$\text{問4より, } y_n = \frac{a_n}{4^n} = \frac{n}{2} \quad \therefore a_n = \frac{1}{2}n4^n$$

$$S = \sum_{k=1}^n a_k \text{ とおくと,}$$

$$S = \frac{1}{2}(4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + n \cdot 4^n) \cdots \textcircled{1}$$

$$4S = \frac{1}{2}\{4^2 + 2 \cdot 4^3 + \cdots + (n-1) \cdot 4^n + n \cdot 4^{n+1}\} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②の辺々の差を取ると

$$-3S = \frac{1}{2}(4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n) - \frac{1}{2}n \cdot 4^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4(4^n - 1)}{4 - 1} - 2n \cdot 4^n$$

$$= \frac{(2 - 6n)4^n - 2}{3}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(6n - 2)4^n + 2}{9}$$

問1

$$(1) \overrightarrow{AB} = (1, -2, -5) \text{ より, } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{30}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-4, -2, 0) \text{ より, } |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ より, } \angle BAC = 90^\circ$$

問2

$$(1) \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \text{ かつ } \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC} \text{ より, } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \text{ より,}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + s|\overrightarrow{AB}|^2 + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + t|\overrightarrow{AC}|^2 = 0 \end{cases} \quad \text{問1より} \quad \begin{cases} -3 + 30s = 0 \\ -8 + 20t = 0 \end{cases}$$

$$\text{よって, } s = \frac{1}{10}, \quad t = \frac{2}{5}$$

$$(2) (1) \text{より, } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AH} \text{ とおくと, } \overrightarrow{AD} = \frac{k}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}k\overrightarrow{AC}$$

$$\text{点Dは直線BC上にもあるので, } \frac{k}{10} + \frac{2}{5}k = 1 \quad \therefore k = 2$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

<別解>

Dは直線BC上にあるので、実数 l に対して

$$\overrightarrow{AD} = (1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} \text{ と表される。}$$

Dは直線AH上にもあるので、実数 k に対して

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AH} \text{ と表される。}$$

(1)より、

$$\overrightarrow{AD} = k\left(\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{k}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2k}{5}\overrightarrow{AC}$$

ここで、 $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ より

$$\begin{cases} 1-l = \frac{k}{10} \\ l = \frac{2k}{5} \end{cases}$$

$$\text{これを解くと, } l = \frac{4}{5}, \quad k = 2$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

<別解>

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{5} \text{ だから, } \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{5} \text{ とおくと, } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

点Eは辺BCを4:1に内分する点となり、3点A, H, Eは同一直線上にあるから、点Eと点Dは一致する。

$$\text{よって, } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

問3

問1(2)より, $\angle BAC = 90^\circ$ なので,

線分BCは三角形ABCの外接円の直径となる。

よって, 辺BCの中点をMとすると, Mは三角形ABCの外接円の中心となる。

問2より, $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ なので, HはADの中点。

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} \right) \text{ より}$$

$$OH = |\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\angle OHP = 90^\circ$ より

$$OP^2 = HP^2 + OH^2 = HP^2 + \frac{3}{2}$$

よって, OPの長さが最大となるのは, HPの長さが最大となるとき。

このとき, 点Pは三角形ABCの外接円周上で, 線分HMの点Mを超えた延長上にある。

ここで, $\angle BAC = 90^\circ$ かつ 問1(1) より

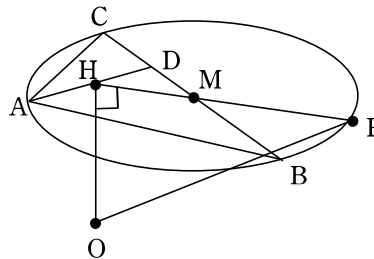
$$BC^2 = (\sqrt{30})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 50 \quad \therefore BC = 5\sqrt{2}$$

よって, 三角形ABCの外接円の半径は $MP = \frac{1}{2}BC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

また, $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{2}\right)$ より, $\overrightarrow{HM} = (0, -1, -2)$

$$\therefore HM = |\overrightarrow{HM}| = \sqrt{5}$$

よって, OPが最大となるとき, $HP = HM + MP = \sqrt{5} + \frac{5\sqrt{2}}{2}$



問1

$$(1) y' = \{x(\log x)^2\}' = (\log x)^2 + 2\log x$$

$$(2) \int \log x dx = x \log x - x + C \quad (C \text{は積分定数})$$

$$(3) y' = \frac{a}{x} \text{ より, 接点の } x \text{ 座標を } t \text{ とおくと, 接点は } (t, a \log t)$$

$$\text{接線の方程式は, } y - a \log t = \frac{a}{t}(x - t)$$

$$\text{これが, 原点を通るとき, } -a \log t = -a \quad \therefore t = e$$

$$\text{よって, 接線 } l \text{ の方程式は, } y = \frac{a}{e}x$$

問2

$$(1) y = a \log x \text{ より } x = e^{\frac{y}{a}}$$

よって, 求める体積は,

$$\begin{aligned} & \int_0^a \pi \left(e^{\frac{y}{a}} \right)^2 dy - \frac{1}{3} \pi e^2 a \\ &= \pi \left[\frac{a}{2} e^{\frac{2}{a}y} \right]_0^a - \frac{\pi}{3} a e^2 \\ &= \frac{a\pi}{2} (e^2 - 1) - \frac{\pi}{3} a e^2 \\ &= \frac{a}{6} (e^2 - 3) \pi \end{aligned}$$

(2) x 軸まわりに1回転させてできる立体の体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot e - \int_1^e \pi (a \log x)^2 dx$$

ここで, 問1(1),(2)より

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= \int [(x \log x)^2]' - 2 \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C \quad (C \text{は定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{a^2 e}{3} \pi - a^2 \pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_1^e \\ &= \frac{a^2 e}{3} \pi - a^2 \pi (e - 2e + 2e - 2) \\ &= \frac{2}{3} a^2 (3 - e) \pi \end{aligned}$$

$$\text{これが, (1)の体積と等しいので, } \frac{a}{6} (e^2 - 3) \pi = \frac{2}{3} a^2 (3 - e) \pi$$

$$\therefore a = \frac{e^2 - 3}{4(3 - e)}$$

<計算上の別解>

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + D \quad (D \text{は定数}) \end{aligned}$$