長崎県立大学公開講座　令和5年11月10日（金）

2体問題・3体問題

斎藤　正也（情報システム学部情報セキュリティ学科）

1

令和5年10月29日未明の部分月食

2023-10-29T05:45:38　　2023-10-29T06:03:56

撮影地: 長崎県長与町

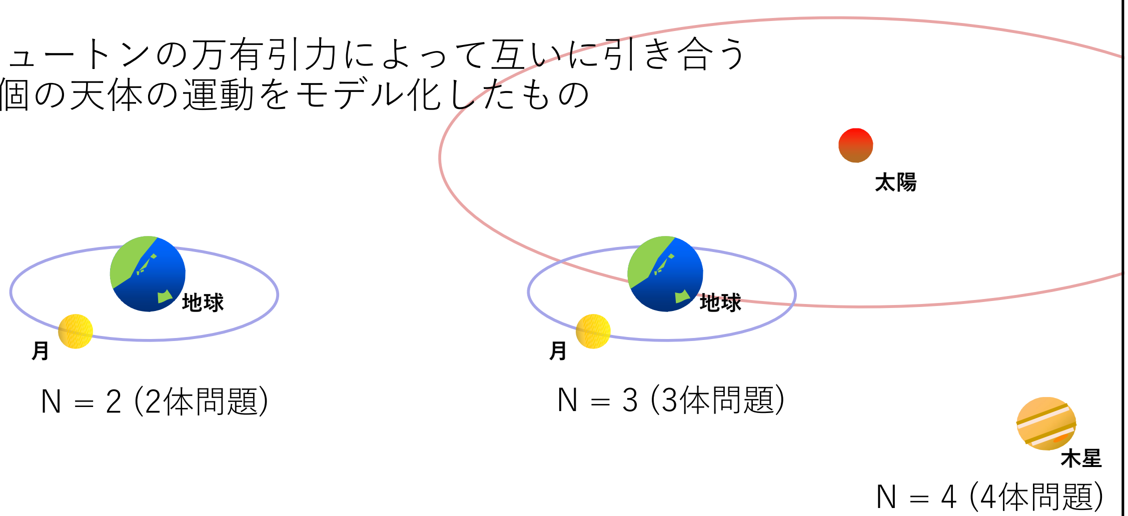
2

はじめに
3体問題とカオス

3

重力N体問題とは

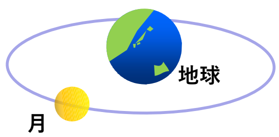
• ニュートンの万有引力によって互いに引き合う
N個の天体の運動をモデル化したもの



4

重力N体問題とは

- ニュートンの万有引力によって互いに引き合う N個の天体の運動をモデル化したもの



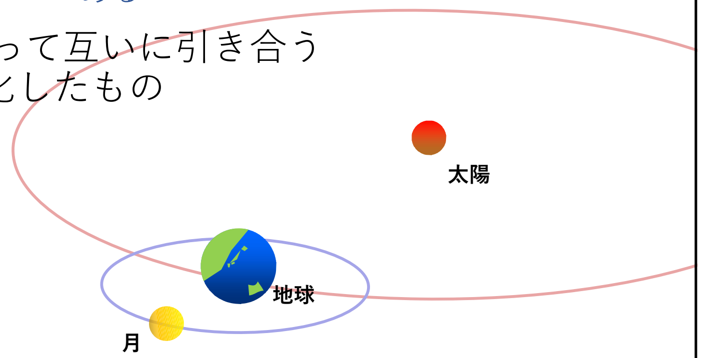
N = 2 (2体問題)

解析解がある

- 天体は閉じた楕円の上を永久に動き続ける
- **紙と鉛筆**を使った研究

N ≧ 3: 解析解がない (コンピュータを使う)

- 天体が描く楕円の形がすこしずつ変わる
- 天体たちが**複数の群れに分かれる**ことがある



N = 3 (3体問題)

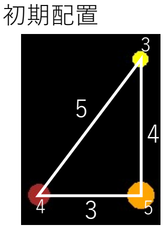
N = 4 (4体問題)

5

重力三体問題

ピタゴラス三体問題（カオス的な運動の例）

初期配置

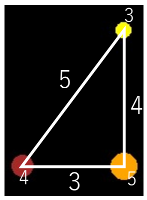


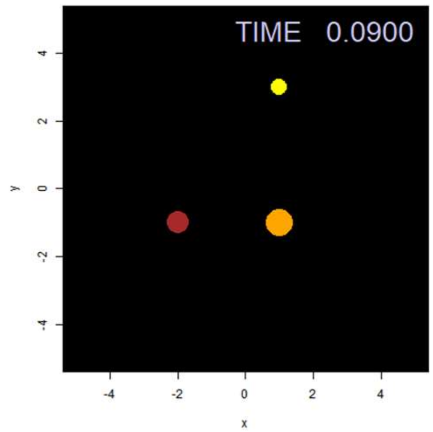
6

重力三体問題

ピタゴラス三体問題（カオス的な運動の例）

初期配置





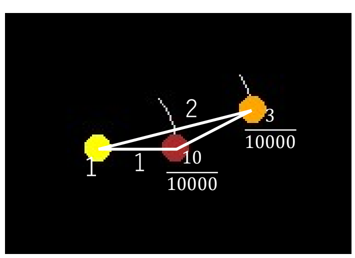
最終的に2体＋1体に分裂する

7

重力三体問題

「重い」太陽系: 木星，土星が実際の29倍重ければ
(Nacozy,1976)

初期配置

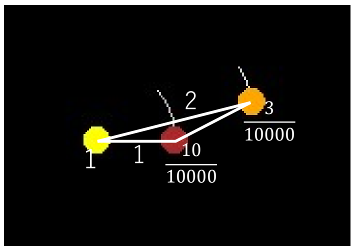


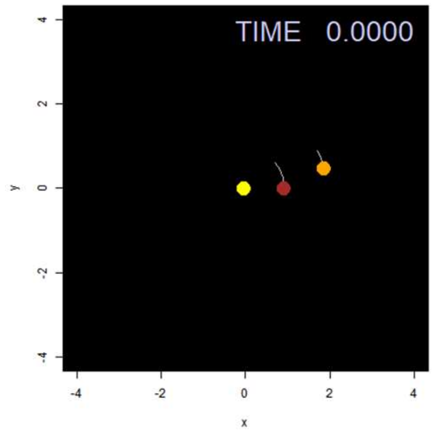
8

重力三体問題

「重い」太陽系: 木星，土星が実際の29倍重ければ
(Nacozy,1976)

初期配置



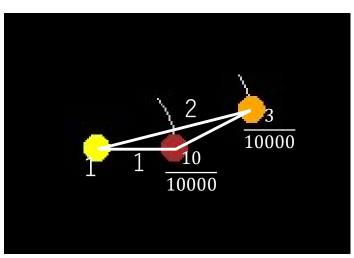


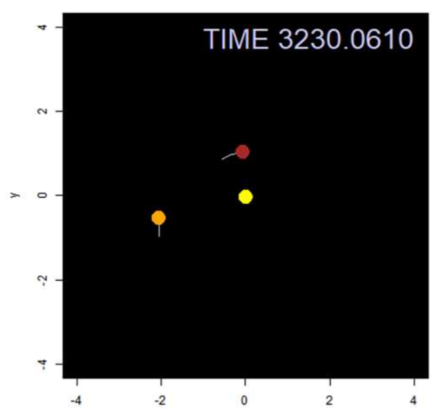
9

重力三体問題

「重い」太陽系: 木星，土星が実際の29倍重ければ
(Nacozy,1976)

初期配置





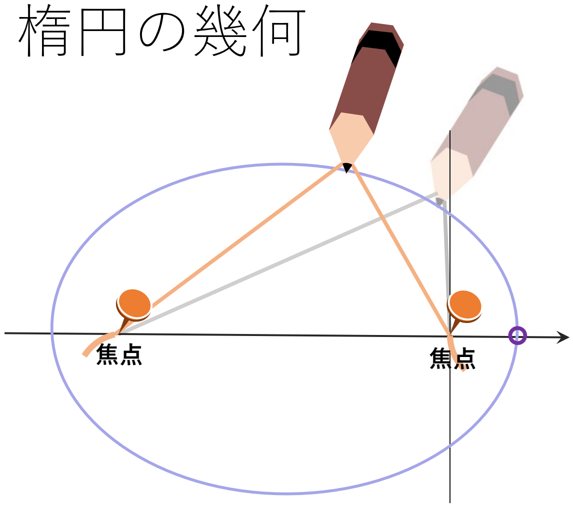
最終的に2体＋1体に分裂する

10

楕円の幾何学と軌道要素

11

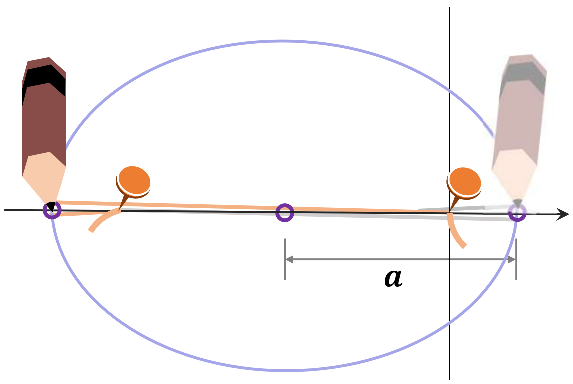
楕円の幾何



- 平面上の2定点からの距離の和が等しい点の集合
- 両端を画びょうで固定したひもに鉛筆を掛け，たるまないように一周させるときれいに描ける
  - 画びょうの位置を**焦点**という．

12

楕円の幾何



- 平面上の2定点からの距離の和が等しい点の集まり
- 両端を画びょうで固定したひもに鉛筆を掛け，たるまないように一周させるときれいに描ける
  - 画びょうの位置を**焦点**という.
- 鉛筆がとがった方の頂点にいるときを考えると…

長径＝ひもの長さ

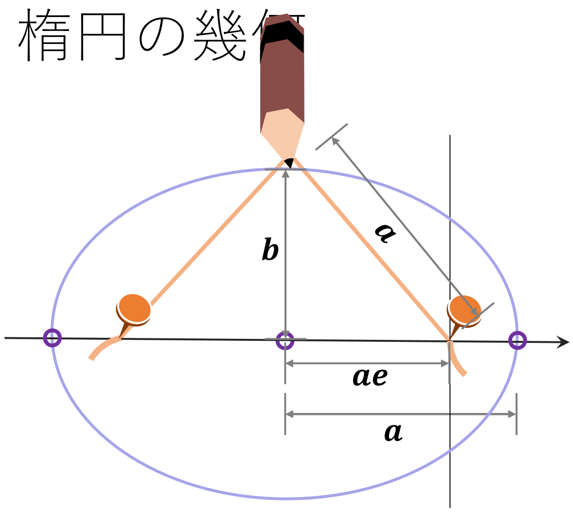
- 長径の半分を**(軌道)長半径**とよび記号

$$\boldsymbol{a}$$

- で表す

13

楕円の幾何



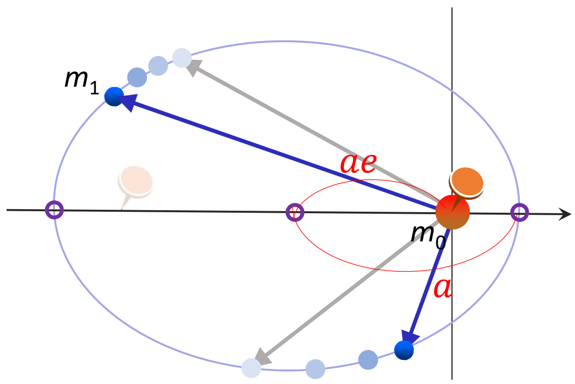
- 楕円の中心から画びょう(焦点)までの距離が大きいほど，つぶれた楕円になる
- この距離を長半径$\boldsymbol{a}$で割った量はつぶれ具合を表す指標になり，離心率と呼び，記号

$$\boldsymbol{e}$$

- で表す
  - 中心と画びょう間の距離 $= \boldsymbol{ae}$
  - 短径 $\boldsymbol{b} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - (\boldsymbol{ae})^2}$
    $= \boldsymbol{a}\sqrt{1 - \boldsymbol{e}^2}$

14

楕円軌道とケプラーの法則



- ケプラーの法則
  1. 惑星●は太陽●を焦点とする楕円上を運動する.
  2. 面積速度は一定である.
  3. 公転周期 T と軌道長半径 a の間には正の比例関係がある:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_0 + m_1)}{(2\pi)^2}$$

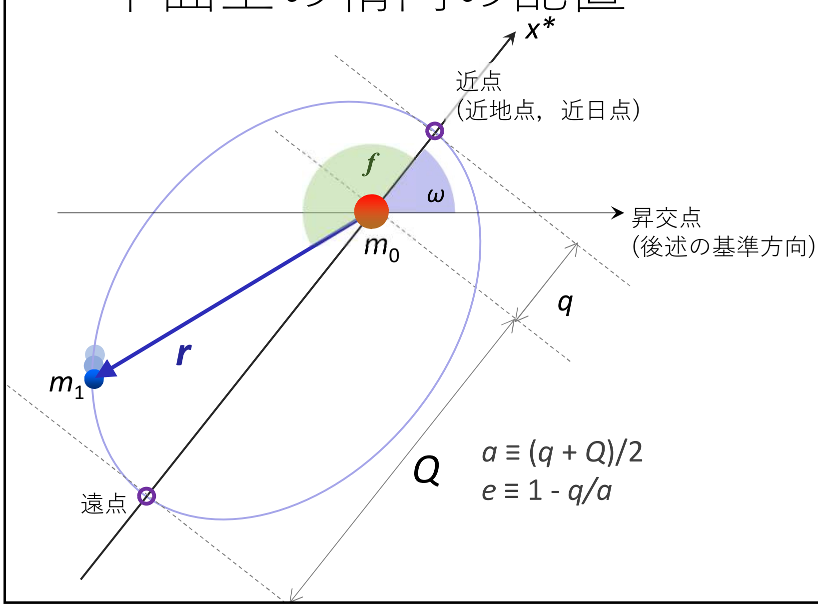
※万有引力定数
$G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$

m_0: 太陽の質量 (1.99×10^{30}kg)
m_1: 惑星の質量
木星: 1.90×10^{27}kg
土星: 5.68×10^{26}kg
地球: 5.97×10^{24}kg

※後の説明との整合性のために中心の太陽を0番，
公転している惑星を1番としています

15

平面上の楕円の配置



楕円のかたちと方向を決める

a: 軌道長半径
e: 離心率
ω: 近点引数

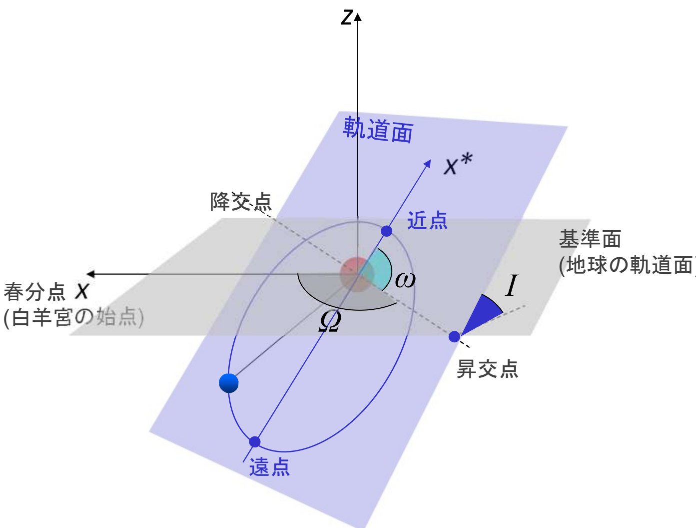
惑星の位置を決める

f: 真近点離角
u: 離心近点離角
$\ell = nt + \sigma$: 平均近点離角
($\lambda = \ell + \omega = nt + \varepsilon$: 平均経度)
n: 平均運動 (角速度)

- $n^2 a^3 = G(m_0 + m_1)$
- $u - e \sin u = l$
- $\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$

16

空間上の楕円の配置



I: 軌道傾斜角

Ω:昇交点経度

ω: 近点引数

$\varpi = \omega + \Omega$: 近点経度

- 太陽系だとほぼ$I = 0°$ なので，春分点から測った経度とほぼ等しく便利

どうでもいい豆知識

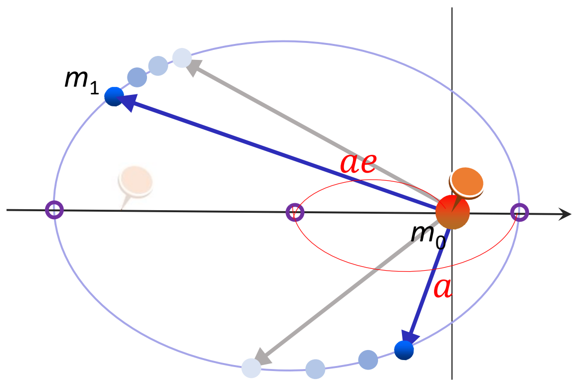
- ϖ は π の異体字
- 地球の自転軸のすりこぎ運動のために春分点は毎年動く．そのため現在，白羊宮にはうお座がある．

17

ケプラー運動

18

楕円軌道とケプラーの法則



- ケプラーの法則
  1. 惑星●は太陽●を焦点とする楕円上を運動する.
  2. **面積速度は一定である**.
  3. 公転周期 T と軌道長半径 a の間には正の比例関係がある:

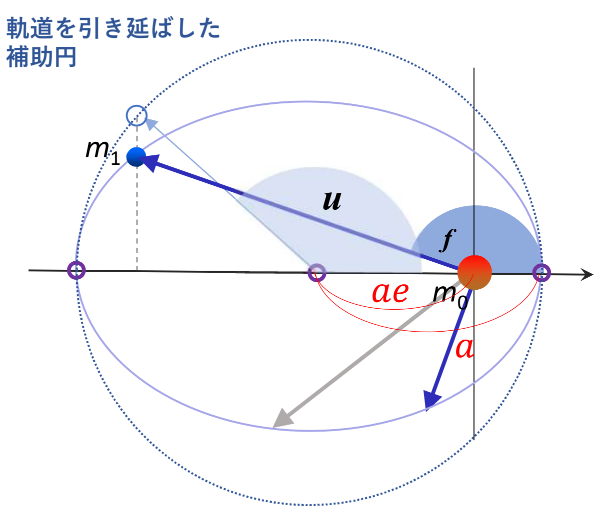
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_0 + m_1)}{(2\pi)^2}$$

※万有引力定数
$G = 6.67 \times 10^{-1}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$

m_0: 太陽の質量 (1.99×10^{30}kg)
m_1: 惑星の質量
木星: 1.90×10^{27}kg
土星: 5.68×10^{26}kg
地球: 5.97×10^{24}kg

19

ケプラー方程式



- 補助円の導入
  - 縦に$\sqrt{1-e^2}$倍して軌道を真円に
  - 円の中心から補助円上の点への方位角uで**間接的に**天体の方向を表す
- uを使った天体位置(x, y)の表示
  - $x = a\cos u - ae$
  - $y = b\sin u$; $b = a\sqrt{1-e^2}$
- 角度 u と時刻 t の関係

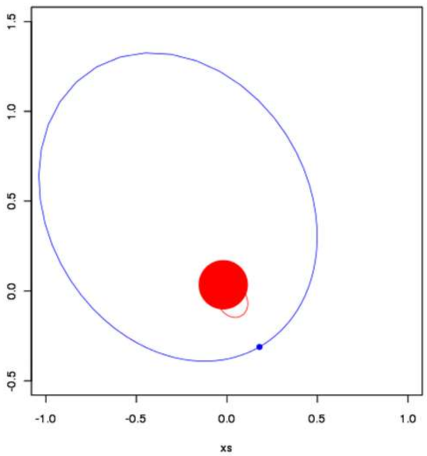
$$\boldsymbol{u - e\sin u = n(t - t_0)}$$

  - t_0: 近点通過時刻
  - n : 公転周期をTとして$n = \frac{2\pi}{T}$

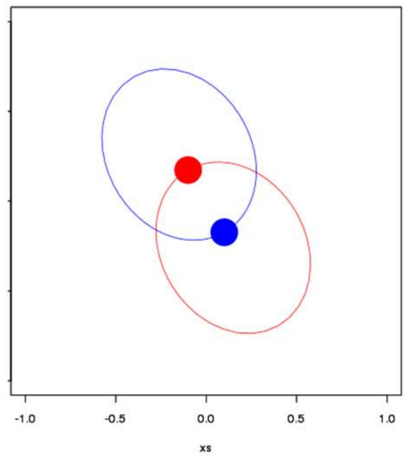
※角度 u のことを離心近点角と呼びます. 書籍によっては E と書くこともあります.

20

二体問題のシミュレーション



質量比 m_0:m_1= 9 : 1



質量比 m_0:m_1= 5 : 5

- 太陽と惑星の距離が近いとき速く，遠いとき遅い
- **楕円の方向**は変わらない
- 「中心天体のまわり惑星がまわる」という言い方をしてきたが，静止系では「お互いの重心のまわりをまわる」と表現した方が実は正しい．
- 質量が同程度だと，そのことがはっきりする．

21

速度と加速度～動力学へ

22

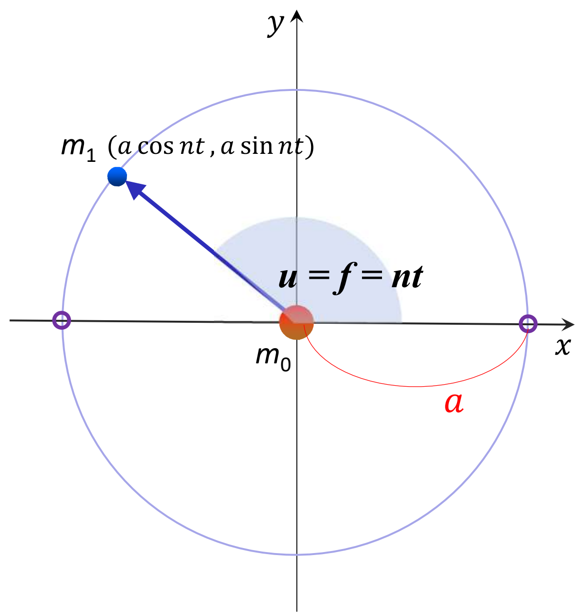
円軌道の場合

- uを使った天体位置の表示
  - $x = a\cos u - ae$
  - $y = a\sqrt{1-e^2}\sin u$　　　少々複雑である☹
  - $u - e\sin u = n(t - t_0)$

円軌道 $e = 0$ の場合を考える
時間を近点にいるときから計る ($t_0 = 0$)

- $x = a\cos nt$
- $y = a\sin nt$

- **円の媒介変数表示**
- **等速円運動**



23

円軌道の場合: x軸方向の速度

- $x = a\cos nt$
- $y = a\sin nt$

時間が短い時間h だけ経過する間の
移動距離から速度v_xを計算する

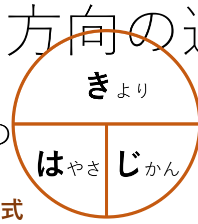
$$v_x = \frac{x\text{軸方向の移動}}{\text{経過時間}}$$

$$= \frac{a\cos(nt+nh) - a\cos nt}{h}$$

$$= -a\sin nt\,\sin\frac{nh}{2}\,\frac{2}{h}$$

$h \to 0$ の極限を取ると　　はn

$$= -n\sin nt$$

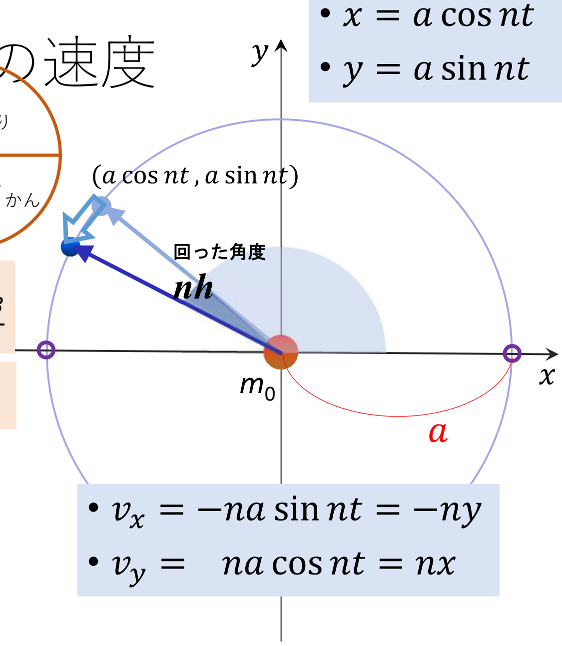


三角関数公式

$\cos A - \cos B$
$= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

小さい角度Aに対して
$\sin A \fallingdotseq A$

- 同じようにしてy軸方向の速度も
  $v_y = n\cos nt$とわかる



- $v_x = -na\sin nt = -ny$
- $v_y = \quad na\cos nt = nx$

24

円軌道の場合: x軸方向の加速度

- $x = a\cos nt$
- $y = a\sin nt$

- $v_x = -na\sin nt = -ny$
- $v_y = \quad na\cos nt = nx$

時間が短い時間h だけ経過する間の
速度の変化から加速度 α_xを計算する

$$\alpha_x = \frac{x\text{軸方向速度の変化}}{\text{経過時間}}$$

三角関数公式

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

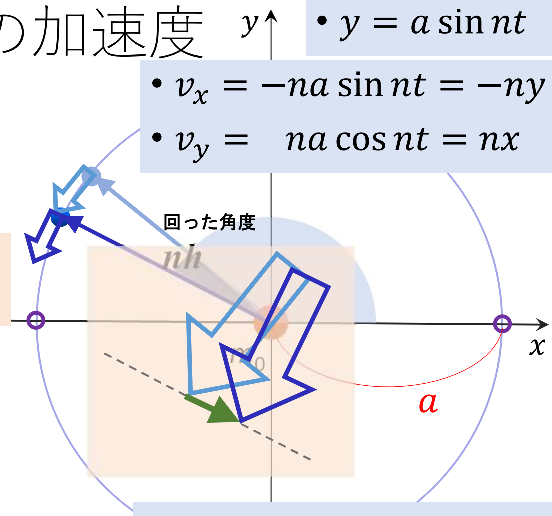
$$= \frac{-na\,\mathrm{si}\ \ (nt+h)-(-na\sin n\ \ )}{h}$$

$$= -na\cos nt\sin\frac{nh}{2}\frac{2}{h}$$

$h \to 0$* の極限を取ると　は*n

$$= -n^2 a\cos nt$$

- 同じようにしてy軸方向の速度も
  $v_y = -n^2 a\sin nt$とわかる



- $\alpha_x = -na\cos nt = -nx$
- $\alpha_y = -na\sin nt = -ny$

25

円軌道の場合:運動方程式と万有引力

- $\alpha_x = -n^2 x$
- $\alpha_y = -n^2 y$

加速度の方向は惑星→太陽

「人工衛星は常に地球に向かって落ち続けている」

$$n^2 a^3 = G(m_0 + m_1)$$

ケプラー第3法則

- $\alpha_x = -\frac{G(m_0+m_1)}{a^3}x$
- $\alpha_y = -\frac{G(m_0+m_1)}{a^3}y$

26

円軌道の場合:運動方程式と万有引力

力　質量　加速度

$$\vec{F} = M\vec{\alpha}$$

ニュートンの運動方程式

「力を加えると加速度が生じる」

$$M = \frac{m_0}{m_0 + m_1} m_1 \fallingdotseq m_1$$

質量 M に
惑星の質量を当てはめる

万有引力の法則

- $F_x = -\frac{Gm_0m_1}{a^2} \cdot \frac{x}{a}$
- $F_y = -\frac{Gm_0m_1}{a^2} \cdot \frac{y}{a}$

（色付きの部分）が力の大きさ

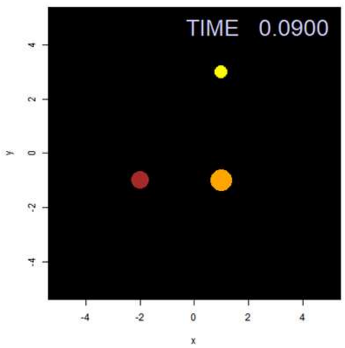
- 太陽の質量と惑星の質量の積に比例する
- 太陽と惑星の間の距離の2乗に反比例する

27

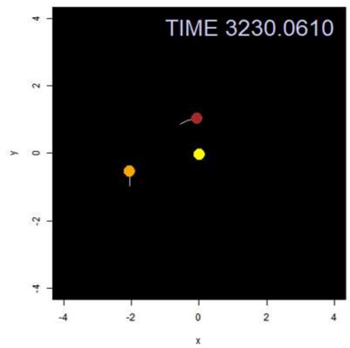
3体問題 (研究の話)

28

天体が3つになると



や



のように数式で表現できない複雑な運動になる

「ケプラーの法則」のような一般的な法則を見出すことはできないか?

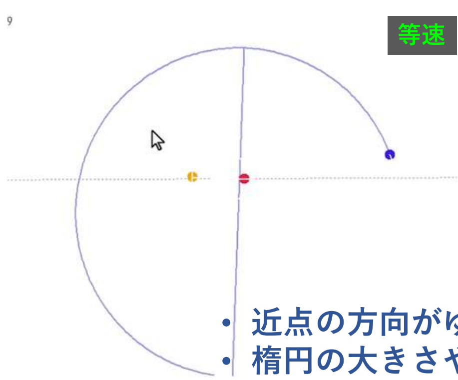
考えうるアプローチ

- 3番目の天体の影響が小さい状況を考える（摂動論）
  - 「質量が小さいかとても遠くにあれば，2体問題に近いはず」
- 特別な配置に限定することで問題を簡単にする
  - 左の例は初期状態で3つとも静止している
- コンピュータでさまざま設定で計算して統計処理する

29

第3天体の影響が小さい場合

設定　質量: $m_0 = 1,\ m_1 = 0.1,\ m_2 = 0.5$
軌道要素: $a_1 = 1, e_1 = 0.5,\ \varpi_1 = 0°\ a_2 = 5,\ e_2 = 0.2, \varpi_2 = 90°, I = 0$



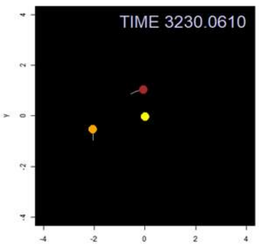
- **近点の方向がゆるやかに回転する**
- **楕円の大きさやつぶれ具合も変化している**

- **これらは三角関数の和で記述できる**

30

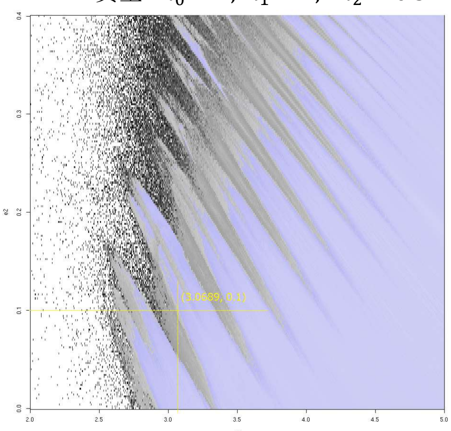
第3天体の影響が小さい場合

- **先述の通り，分裂が起こることがある**



- **与えられた初期値から分裂が起こるかどうかを予測するのはとても難しい**
- **かわりに，おおまかに分裂が起きそうな設定とほぼ起こらない設定を仕分けることを考える**

質量: $m_0 = 1, m_1 = 1,\ m_2 = 0.5$



31

まとめ

- 天体が2つだけの2体問題は楕円軌道を描きながらお互いのまわりをまわる（ケプラーの法則）
- ケプラーの法則は万有引力で説明できる
- 3体以上になると運動を数式で簡単に描くことはできないが，さまざまなアプローチで法則を探ることができる

32