

フーリエ級数，フーリエ変換，ラプラス変換の比較

2023 年 8 月 1 日

概要

音波などの周期関数で記述される現象がある。周期関数は周波数の異なる三角関数の和で表すことができ、その係数を取り出すことで、波形の特徴を周波数上で解析することができる。これを行うのがフーリエ級数展開やフーリエ変換であるが、このほかにラプラス変換や離散フーリエ変換、いわゆる FFT があり、表現の違いから相互運用しようとするると混乱することも少なくない。

本稿ではフーリエ級数展開から出発し、なるべく閉じた記述を行い、これらを相互比較しようとするものである。網羅的な記述をめざしたものでなく、相互比較の指針を示すのが狙いである。

式の導出には [城戸 (2007)] を参考にした。

1 フーリエ級数・フーリエ変換・ラプラス変換

1.1 周期関数

自然現象の中には一定のパターンが繰り返される、いわゆる周期性を持つものがある。そのうち最も身近なもののひとつは音波であろう。人は周期的に変動する圧力を音として知覚している。図 1 はピアノの標準音高 (440Hz, 中央付近のラ) の波形である。ただし、波形を記録する期間と打鍵からの経過時間が異なっており、一番上から打鍵直後の 1000 ミリ秒間、同 50 ミリ秒間、打鍵から 200 ミリ秒、500 ミリ秒、2000 ミリ秒経過後の 20 ミリ秒間の波形がそれぞれ描かれている。音圧は 1 秒間に大きく変動しており、打鍵直後に急激に上昇したあと、緩やかに下降する特徴が観察される。その点で同じパターンの繰り返しとは言い難く、大まかな音圧の変動 (青い線で示されるエンベロープ) がピアノの特徴的な音色を作り出しているが、観察期間が短い下 3 つのパネルではそれぞれ決まったパターンが全部で 9 回繰り返していることが見て取れる。

このように観察期間を適当に限定する必要があるものの、同じパターンが繰り返す現象を自然界に見出すことができる。そのような現象を無限回同じパターンが繰り返すという理想化の上でモデル化したのが周期関数である。

項目 1.1 (周期関数). 関数 $f(t)$ を実数全体で定義された、実数値 (または複素数値) を取る関数とする。 $f(t)$ が周期関数であるとは、ある正の数 T に対して、

$$f(t+T) = f(t), \quad \text{ただし } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (1)$$

がなりたつことである。

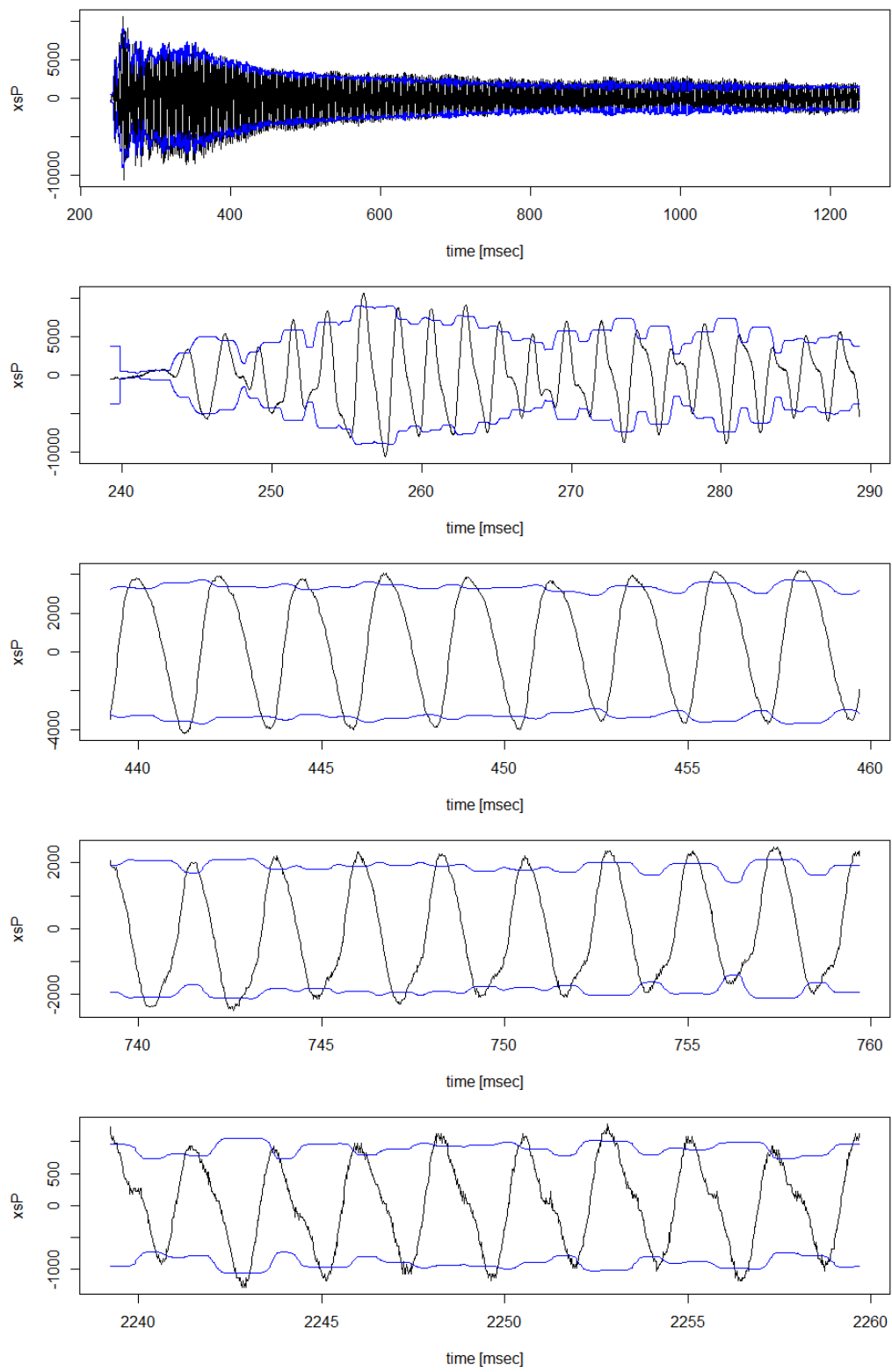


図 1: ピアノの ν_2 波形 (440Hz)

この T を $f(t)$ の周期と呼ぶが、明らかに T を $2T, 3T, \dots$ と置き換えても式 (1) がなりたつ。そこで、式 (1) を成立させる最小の T を特に基本周期と呼んで区別する。ただし、以下ではまぎれがないかぎり基本周期をたんに周期と呼ぶ。

周期 T の逆数を周波数とよぶ。周波数を f とすると $fT = 1$ がなりたつ。

1.2 フーリエ級数

周期関数は不連続点での不一致を除けば三角関数の和で表されることが知られている。以下にその具体的な表式を示す。

項目 1.2 (周期関数のフーリエ級数展開). $f(t)$ を基本周期 $T = 2L$ の周期関数とする。このとき $f(t)$ は式 (2) のように三角関数の級数で表せ、係数は式 (3), 式 (4) で求められる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

式 (2) の右辺は T を周期とする三角関数, その $T/2$ を周期とする三角関数, 等々の和になっている。したがって, 全体として周期は T である。このような表示が可能な周期関数のクラスを言明するのは難しい数学が必要になる (筆者は詳しくない)。しかし, 式 (2) の表示が可能であれば, 係数 a_n, b_n が式 (3), (4) の積分で計算できることは, m, n を整数とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx &= 0 \end{aligned}$$

がなりたつこと (この関係を三角関数の直交性という) からただちに確認できる。

次にオイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

を用いて, 三角関数の和を (虚数べきの) 指数関数の和に書き換える。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{j\frac{n\pi t}{L}} + e^{-j\frac{n\pi t}{L}}) + \frac{1}{2j} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{j\frac{n\pi t}{L}} - e^{-j\frac{n\pi t}{L}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) e^{-j\frac{n\pi t}{L}} + \frac{a_0}{2} e^{j0\frac{n\pi t}{L}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - jb_n) e^{j\frac{n\pi t}{L}} \\ c_0 &= \frac{1}{2} a_n, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \overline{c_n} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5)$$

で新しい係数 c_n を導入すると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{n\pi t}{L}}$$

とまとめることができる。 c_n の定義式に a_n, b_n を代入して、直接の定義式を求めよう。

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt - j \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left\{ \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) - j \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-j \frac{n\pi t}{L}} dt \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ c_0 &= \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{0\pi t}{L}\right) dt = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-j \frac{0\pi t}{L}} dt \end{aligned}$$

c_0 は $\cos 0 = e^0 = 1$ を利用して、 c_n ($n \neq 0$) と同じ形式になることを示した。以上より、虚数べきの指数関数を使ったフーリエ級数に展開はつぎのようにまとめられる。

項目 1.3 (周期関数のフーリエ級数展開 (複素数版)). $f(t)$ を周期 $2L$ の実数値をとる周期関数とする。 $f(t)$ は以下のように展開できる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi t/L} \quad (6)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-jn\pi t/L} dt \quad (7)$$

このように指数関数 $e^{j \frac{n\pi t}{L}}$ を掛けて 1 周期間積分すると、それぞれの周波数 (ただし正負の 2 つある) の成分 c_n が得られるという簡潔な表現が得られた。

$2L$ での割り算を式 (7) から式 (6) に移すと、これから述べるフーリエ変換や離散フーリエ変換とのつながりが良くなる。これは c_n のかわりに $2Lc_n$ を展開の係数に採用することに総括する。さらに、

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{L} \quad (8)$$

と置いて、角周波数列とその間隔のパラメータも導入する。すると、 n と ω_n は一対一に対応するので、係数 c_n $\omega_0, \omega_{\pm 1}, \omega_{\pm 2}, \dots$ という飛び飛びの値で定義された関数とみることができる。それを踏まえ新しい係数を $F(\omega) = 2Lc_n$ と書くことにする。 $1/(2L) = \Delta\omega/(2\pi)$ に注意すると、式 (6),(7) は

$$f(t) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega \quad (9)$$

$$F(\omega_n) = \int_{-L}^L f(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (10)$$

のように書き換えることができる。

1.3 フーリエ変換

式 (9) の右側の式で、周期を無限大にする極限、すなわち $L \rightarrow \infty$ の極限を取ると、 $\Delta\omega \rightarrow 0$ となり、 n についての和は、角周波数 ω についての積分に変わる

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (11)$$

また、この極限で $F(\omega)$ は実数全体で定義される関数になる。関数 $f(t)$ から $F(\omega)$ を構成することをフーリエ変換、逆に $F(\omega)$ から $f(t)$ を再構成することをフーリエ逆変換という。

周期を無限大にすることは、結局、再び同じパターンが現れることはないということで、 $f(t)$ は非周期関数になることを意味する。したがって、ここまでの議論を以下のようにまとめられる。

項目 1.4 (フーリエ変換). 時間軸上で定義される関数 $f(t)$ 、周波数軸上で定義される関数 $F(\omega)$ に対して、定義域を交換する変換を

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad \text{逆フーリエ変換} \quad (12)$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{フーリエ変換} \quad (13)$$

で定義する。積分が定義されるならば、 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](t)$ 、 $F(\omega) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[F]](\omega)$ が成り立つ。

式 (13) の積分が定義されるには $f(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で「十分速く」0 に収束する必要がある。そのため、 $f(t) = e^{-|t|}$ はフーリエ変換できるが、定数関数 $f(t) = 1$ や $f(t) = \sin t$ はフーリエ変換できない (後で考えるようにデルタ関数などを許せば可能だが、これは通常の意味での関数ではない)。以下の例のように、適当な方法で打ち切れれば、これらの関数のフーリエ変換を求めることができる。

項目 1.5 (フーリエ変換の計算例).

1. $f(t) = I(t \geq 0)e^{-at}$ に対し、

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} \quad (14)$$

2. $f(t) = I(-n\pi \leq t \leq n\pi) \sin \alpha t$ に対し、

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-n\pi/\alpha}^{n\pi/\alpha} \sin \alpha t (\cos \omega + j \sin \omega) dt = \frac{\sin((\omega - \alpha)n\pi/\alpha)}{j(\omega - \alpha)} - \frac{\sin((\omega + \alpha)n\pi/\alpha)}{j(\omega + \alpha)} \quad (15)$$

ここで真理値 {true, false} から実数への関数 $I(x)$ を

$$I(\text{true}) = 1, \quad I(\text{false}) = 0 \quad (16)$$

で定義した。 $I(x)$ は指示関数 (*indicator function*) と呼ばれる。

1.4 離散フーリエ変換

周波数を連続化することでフーリエ級数展開をフーリエ変換に拡張したが、反対に時間を離散化することで離散時間上で定義された関数に対するフーリエ変換とその逆変換を定義できる。高速フーリエ変換と呼ばれる能率的なアルゴリズムがあるので適当に長い L で連続版のフーリエ変換を近似的に計算するという利用が考えられる。ここでは離散フーリエ変換をフーリエ変換の近似という視点でやや発見的に定式化する。

記述の平易のために周期を $T = 2L$ とおき、1 周期間を $0 \leq t \leq T$ にずらす。この 1 周期 T を N 区間に分割し、 $f(t)$ の $\Delta t = T/N$ ごとの標本点 $\{f(l\Delta t) | l = 0, 1, \dots, N-1\}$ で式 (17) または式 (13) の積分を近似すると

$$\mathcal{F}[f](\omega_n) = \int_0^T f(t)e^{-j\omega_n t} dt \approx \sum_{l=0}^{N-1} f(l\Delta t)e^{-j(n\Delta\omega)(l\Delta t)}\Delta t, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}$$

となるので、離散フーリエ変換として

$$\tilde{\mathcal{F}}[f] = \sum_{l=0}^{N-1} f(l\Delta t)e^{-jn l \Delta\omega \Delta t}, \quad \Delta\omega \Delta t = \frac{2\pi}{N}$$

を定めると、ひとまず $\mathcal{F}[f] = \frac{T}{N}\tilde{\mathcal{F}}[f]$ の近似関係が得られる。ここでの指数関数の肩から物理的周期 T が消えてることに注意。

間隔の空いた標本点での $f(t)$ の値しか見ていないので、あまり大きな $|\omega_n|$ に対する周波数成分は正しく抽出されない。実際、 $n = \omega_{N/2}$ に対応する周波数 (ナイキスト周波数と呼ばれる)

$$\omega_{\max} = \frac{N\pi}{T} = \frac{\pi}{\Delta t}$$

を越える周波数成分が $f(t)$ に ω_{\max} を越える成分が含まれているとそれ以下の周波数での $\mathcal{F}[f]$ の値を汚染する。これは以下のように説明できる。周波数がちょうど ω_{\max} の波では、標本点を進むごとに位相が 180° だけ進む。それより少し高い周波数では位相はたとえば 181° だけ進むことになるが、これは少し低い負の周波数の波で 179° だけ位相が進んだのと区別できない。その結果、上記の計算では $\omega_{\max} - \epsilon$ の成分には本来の成分に加えて $\omega_{\max} + \epsilon$ の成分が混ざることになる。このようなひずみを折り返しひずみと呼ぶ。

上の議論より式 (9) の和は $-N/2 \leq n \leq N/2$ に制限する必要がある (N の偶奇により端点処理に気を払う必要があるが、ひとまずここでは省略)。しかし、類似の議論で $0 \leq n \leq N-1$ にシフトできる。実際、 $-N/2 \leq n < 0$ に対して

$$e^{j\omega_n l \Delta t} = e^{j2\pi(N/T) \cdot l \cdot (T/N)} = 1$$

を掛けると

$$e^{j\omega_n l \Delta t} = e^{j\omega_n l \Delta t} e^{j\omega_{N/2} l \Delta t} = e^{j\omega_{n+N/2} l \Delta t}$$

とできて、 $N/2 \leq n + N/2 < N$ である。

さて、式 (9) より逆フーリエ変換の近似として

$$\mathcal{F}^{-1}[F](l\Delta t) \approx \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} F(\omega_n) e^{j\omega_n l \Delta t}$$

ここでも係数の $1/T$ を除いた部分を離散逆フーリエ変換 $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[F]$ と定めると、近似関係 $\mathcal{F}^{-1}[F](t) \approx \frac{1}{T}\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[F](t)$ が成り立つ。

以上の考察をもとに改めて離散フーリエ変換・逆変換を次のように定義し、連続版との近似関係をまとめる:

項目 1.6 (離散フーリエ変換と連続関数のフーリエ変換の近似). N 項の数列 $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$ に対して離散フーリエ変換 \mathcal{F} とその逆変換 \mathcal{F}^{-1} を

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\mathbf{F}] = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi n l / N} \quad (17)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}[\mathbf{f}] = \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{j2\pi n l / N} \quad (18)$$

で定義する. さらに, 連続関数 $f(t), F(\omega)$ に対して, 十分大きく N, T を取り, 関数の標本点と数列との対応を

$$f_l = f(l\Delta t), \quad \Delta t = T/N, \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19)$$

$$F_n = F(n\Delta\omega), \quad \Delta\omega = 2\pi/T, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (20)$$

で定めると, 項目 1.4 で定義される $f(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$, $F(\omega)$ の逆変換 $\mathcal{F}^{-1}[F]$ との間に近似関係

$$\mathcal{F}[f] \approx \frac{T}{N}\tilde{\mathcal{F}}[f], \quad \mathcal{F}^{-1}[F](t) \approx \frac{1}{T}\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[F](t) \quad (21)$$

が成り立つ.

1.5 ラプラス変換

前節の例 1 は, 定義域を $t \geq 0$ に限定し, さらに収束の速い関数 $e^{-\alpha t}$ を掛けることで, 定数関数のフーリエ変換を成立させている. この手法でフーリエ変換を無限速で 0 にならない関数に拡張したのがラプラス変換である. フーリエ変換は角周波数 ω を引数とする関数であったが, ラプラス変換は複素数 $s = \sigma + j\omega$ ($\sigma > 0$) を引数とする関数として

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{F}[I(t \geq 0)e^{-\sigma t}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (22)$$

で定義される.

対応して, 逆ラプラス変換は $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ から逆フーリエ変換により $e^{-\sigma t}f(t)$ を復元し, 次いで $e^{\sigma t}$ を掛けることで $f(t)$ を復元することと定式化される.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = e^{\sigma t}\mathcal{F}[F(s)] = e^{\sigma t} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} F(s)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \quad (23)$$

最後の式では, 積分変数を ω から $s = \sigma + j\omega$ に変えると, ω の変域 $-\infty < \omega < \infty$ が s の変域 $\sigma - j\infty \leq s \leq \sigma + j\infty$ に移ることと, $ds = jd\omega$ になることを用いた. この積分はブロムウィッチ積分と呼ばれる. 留数定理を用いて計算できるが, 複素関数の知識が必要なのでここでは触れない. 予め関数とそのラプラス変換の対応表を用意して置き, これを逆引きすることで逆ラプラス変換を求めるのが普通である.

項目 1.7 (ラプラス変換). $t \geq 0$ で定義される関数 $f(t)$ について, 式 (25) で複素数上の関数 $F(s)$ を定義すると, 式 (24) で定義される $F(s)$ の積分によって $f(t)$ を復元できる.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad \text{逆ラプラス変換} \quad (24)$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{ラプラス変換} \quad (25)$$

いくつかの公式を示す.

項目 1.8 (ラプラス変換の基本的公式).

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = 1/s, \quad \text{ただし } u(t) = I(t \geq 0) = 1 \quad (26)$$

$$\mathcal{L}[\sin \alpha t](s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \quad (27)$$

$$\mathcal{L}[\cos \alpha t](s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2} \quad (28)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)](s) \quad (29)$$

$$\mathcal{L}\left[\int g(t) dt\right] = \frac{1}{s}G(0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}[g(t)](s), \quad \text{ただし } G(t) = \int g(t) dt = G(0) + \int_0^t g(t') dt' \quad (30)$$

これらの公式の使用例として, 調和振動子の運動をあらわす微分方程式を解いてみる.

項目 1.9 (ラプラス変換の応用例: 調和振動子). ばね定数 k のばねに質量 m をつけて振動させたとき, 時刻 t での自然長からのずれ $f(t)$ は微分方程式

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 f(t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

に従う. この微分方程式の解を求めよ.

(解) $\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$, $\ddot{f}(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$, と書くことにする. 式 (29) を 2 回適用すると, 2 回微分のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = -\dot{f}(0) + s\mathcal{L}[\dot{f}(t)](s) = -\dot{f}(0) + s(-f(0) + sF(s)) \quad (31)$$

が求まる. これを使うと微分方程式全体のラプラス変換

$$-\dot{f}(0) - sf(0) + s^2 F(s) = -\omega_0^2 F(s)$$

が求まる. $F(s)$ について解くと

$$F(s) = \frac{sf(0) + \dot{f}(0)}{s^2 + \omega_0^2} = f(0) \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\dot{f}(0)}{\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

式 (27), 式 (28) と照合して, 逆変換すると

$$f(t) = f(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{f}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

と解が得られる. $t = 0$ での位置 $f(0)$ と速度 $\dot{f}(0)$ を与えると具体的な解がひとつ決まる. このように項目 1.6 のような公式集を用意して置けば, ラプラス変換により微分方程式を解くことができる.

2 いくつかの例

2.1 基本的な波形のフーリエ展開

矩形波 $t = 0$ で立ち上がる平均 0, 振幅 1, 周期 $2L$ 矩形波は

$$\text{square}(t) = \begin{cases} -1 & (-L/2 \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < L/2) \end{cases}$$

と書ける (図 2). 式 (3),(4) を使い係数を計算する. まず $\text{square}(-t) = \text{square}(t)$ が成り立つことから $a_n = 0$ がわかる.

$$b_{2n} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \text{square}(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) dt = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) dt = 0$$
$$b_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{L}\right) dt = -\frac{2}{L} \frac{L}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{L}\right) \Big|_0^L = -\frac{2}{L} \frac{L}{(2n+1)\pi} (-1 - 1) = \frac{4}{(2n+1)\pi}$$

これから矩形波は基本周波数の奇数倍周期の正弦波の和で

$$\text{square}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{L}\right) \quad (32)$$

と表されることがわかる.

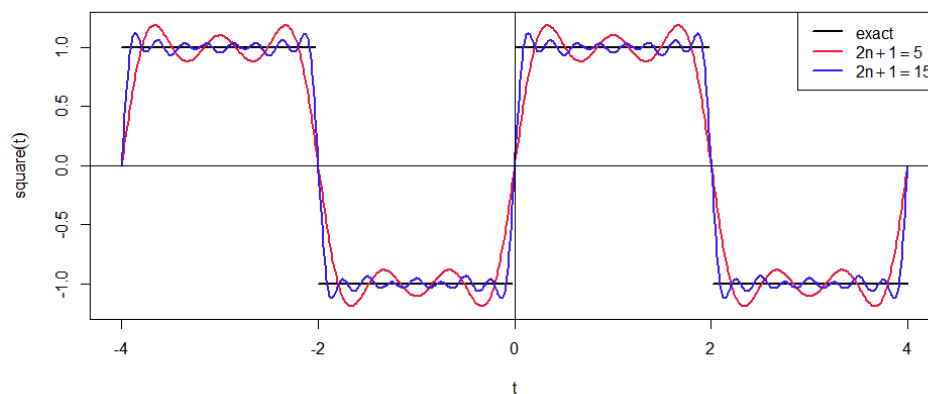


図 2: 矩形波とそのフーリエ展開 ($L = 4$)

2.2 ヘビサイド関数

ヘビサイド関数は以下のように

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (33)$$

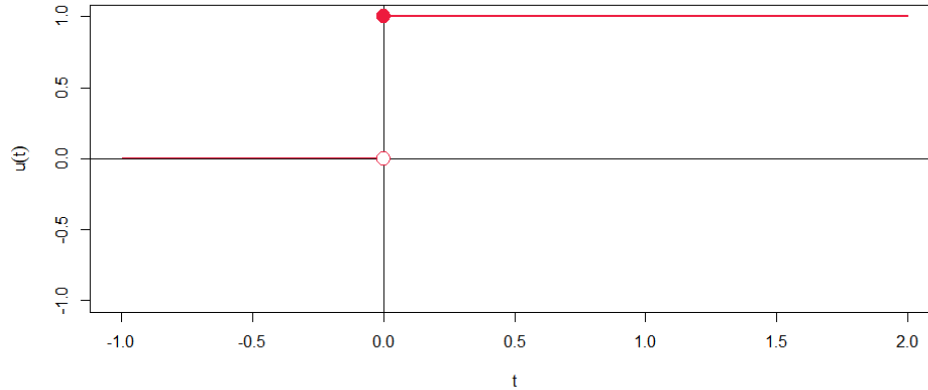


図 3: ヘビサイドの階段関数

過去ではすべて 0, 現在 ($t = 0$) および未来 ($t \geq 0$) ではすべて 1 を取る関数である (図 3).

電気回路の過渡現象や信号処理を解析する上で重要な関数である. 積分が発散するので直接フーリエ変換を求めることはできない. しかし, 式 (??) の矩形波に定数を加え, $L \rightarrow \infty$ の極限を取ったもの

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \text{square}(t) \quad (34)$$

と見て, そのフーリエ級数の極限として求めてみる. n 番目の角周波数, 隣接する角周波数の間隔

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{L}, \quad \delta\omega = \frac{2\pi}{L}$$

を使い, フーリエ級数を書き換える

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{L}\right) \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{L}\right) \frac{2\pi}{L} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \delta\omega_n \quad (37)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) d\omega \quad (38)$$

ここで $\omega \rightarrow 0$ で $1/\omega$ が発散することを考慮して, 極限を残した. しかし, $\lim_{\omega \rightarrow 0} \sin(\omega t)/\omega = t \lim_{\omega \rightarrow 0} \sin(\omega t)/(\omega t) = t$ となり, 被積分関数全体は収束する.

先に進む前に, 最後の式から公式を導いて置く. 任意の $t > 0$ で $u(t) = 1$ だから

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) d\omega$$

整理すると, 以下の公式を得る.

項目 2.1 (Sinc 関数の積分公式).

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ただし } \alpha > 0 \quad (39)$$

式 (38) に戻り, 以下の公式を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = e^{j0t} = 1 \quad (40)$$

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega t} = \frac{1}{2j} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \frac{1}{2j} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega \quad (41)$$

を使って書き換える. 下の式の PV は, $|\omega| < \epsilon$ の範囲を「くりぬいた」積分を先に計算し, その $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることを表す. すなわち $a < 0 < b, \epsilon > 0$ として

$$PV \int_a^b = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^b \right)$$

で定義されるご都合主義的な計算法で積分値を設定するもので, コーシーの主値と呼ばれる. これから

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2j} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega \quad (42)$$

というフーリエ逆変換による $u(t)$ の表示を得る. ここから (係数を調整して) 被積分関数を抜き出すと $u(t)$ のフーリエ変換が得られる.

$$\mathcal{F}[u(t)](\omega) = \pi \delta(\omega) + PV \frac{1}{j\omega} \quad (43)$$

一方, ラプラス変換はすでに見たように,

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{1}{s} \quad (44)$$

である. $t < 0$ では $u(0) = 0$ なので, 収束因子 σ を 0 にして, $s = j\omega$ とすると, ラプラス変換はフーリエ変換に戻るはずである. しかし,

$$\mathcal{L}[u(t)](s = j\omega) = \frac{1}{j\omega} \neq \mathcal{F}[u(t)](\omega)$$

となり先に求めた結果と一致しない. なぜだろうか? 実は, これはいわゆる積分と極限の交換できない例になっている. つまり式 (24) の積分で $u(t)$ を復元した後, $\sigma \rightarrow 0$ とすると正しい結果が得られるが, 先に $\sigma \rightarrow 0$ として後から積分すると間違った結果になる.

正しい積分を得るには,

$$\frac{1}{s} = \frac{\bar{s}}{s\bar{s}} = \frac{\sigma - j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2}$$

と実部と虚部に分けた上で, $\sigma \rightarrow \infty$ の挙動を (これが積分されることに注意を払いつつ) 考察するとよい. 実部が $\pi \delta(\omega)$ に収束することは

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} = \begin{cases} \infty & (\omega = 0) \\ 0 & (\omega \neq 0) \end{cases} \quad (45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma d\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = \arctan \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi \quad (46)$$

という計算から確かめられる。

虚部については単に $\sigma = 0$ とすると正しい値, $-j/\omega = 1/(j\omega)$ が得られる。一見, ご都合主義的に見えるが, つぎの定理により $\sigma \rightarrow 0$ を積分より先に行うことが正当化される。

項目 2.2 (ルベークの収束定理). $f_1(x), f_2(x), \dots$ を実数全体で定義された非負の関数の列とする。可積分な関数 $g(x)$ が存在して $f_n(x) \leq g(x)$ が成り立ち, 関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に各点収束するならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

ルベーク積分の知識が必要なので証明は省略する。興味がある読者は [森 (2012)] などを参照のこと。概略としては, $\omega/(\sigma^2 + \omega^2) < 1/\omega$ なので, この定理で $g(x) = f(x)$ に相当するものを $1/\omega$ に取れば, $\sigma \rightarrow 0$ の極限を積分前に実行できる。ただし, より精密には式 (24) で, $\sigma > 0$ を固定し, $ds = j d\omega$ に戻したうえで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{-M}^{-\epsilon} f_{\sigma}(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_{\epsilon}^M f_{\sigma}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{主値積分に帰着させる準備})$$

$$\int_{\epsilon}^M f_{\sigma}(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_{\cos \omega t \geq 0} f_{\sigma}(\omega) \cos \omega t d\omega - \int_{\cos \omega t < 0} f_{\sigma}(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (\text{虚部 } \sin \omega t \text{ も同様})$$

と分割して, 個別に定理を適用する必要がある。

参考文献

[城戸 (2007)] 城戸健一: デジタルフーリエ解析 (I),(II), コロナ社, 2007 年.

[Copeland(2012)] T. Copeland, et al., Why the Fourier and Laplace transforms of the Heaviside (unit) step function do not match? Math Stack Exchange. April 19, 2012.

URL:<https://math.stackexchange.com/questions/129875/why-the-fourier-and-laplace-transforms-of-the-heaviside-unit-step-function-do>

[森 (2012)] 森進: 入門確率解析とルベーク積分, 東京図書, 2012 年.