角の二等分と三等分法
～中学生に戻って作図を楽しみましょう～

永野　哲也

hnagano@sun.ac.jp
情報セキュリティ学科（情報メディア学科）

長崎県立大学　春の公開講座
6 月 4 日（土）
(シーボルト校中央棟 1 階 M103 講義室)

講演内容

　定規とコンパスを使って角を二等分する方法と更にもう一つ “ある操作” を加えて三等分する方法をお話します。特に、角の三等分は古代からの数学上の未解決問題の一つでした。本講座では、実際に、定規とコンパスを使って作図してみます。定規とコンパスをご準備ください。

１．二等分
２．古代の三大作図問題
３．数学としての問題
４．三等分法
５．終わりに

1 二等分

作図：角を二等分する

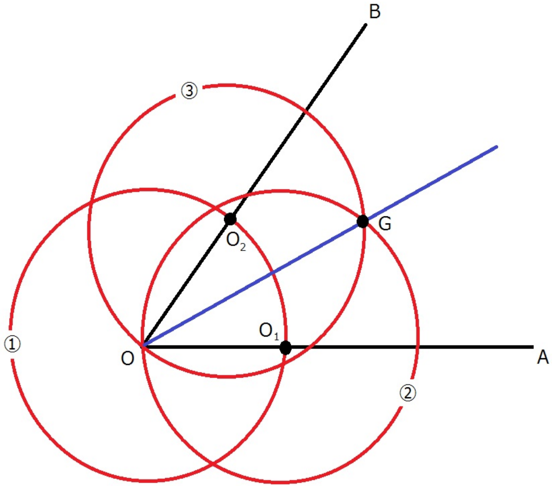


Figure: 角の二等分線の作図

2 古代の三大作図問題

1. 与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作図せよ（円積問題）。

2. 与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作図せよ（立方体倍積問題）。

3. 与えられた角の三等分角を作図せよ（角の三等分問題）

条件：　作図に用いることができるのは、定規（目盛りなし）とコンパスのみとする。

円積問題

与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作図せよ。

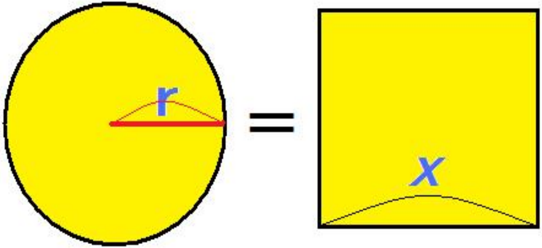
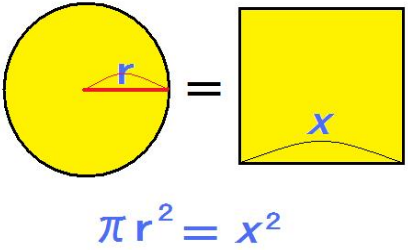


Figure: 円積問題

円積問題

与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作図せよ。



の解

$$x = \sqrt{\pi} r$$

の作図ができればよい。r は与えられるのだから、結局は、$\sqrt{\pi}$ の作図ができればよい。

立方体倍積問題

与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作図せよ。

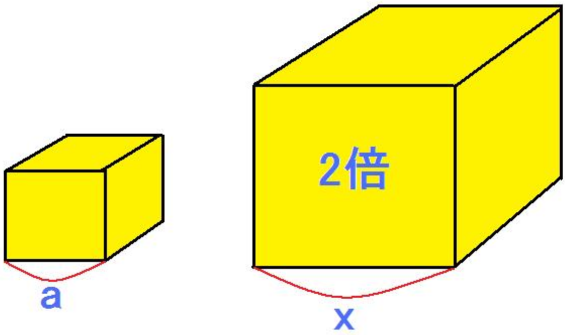
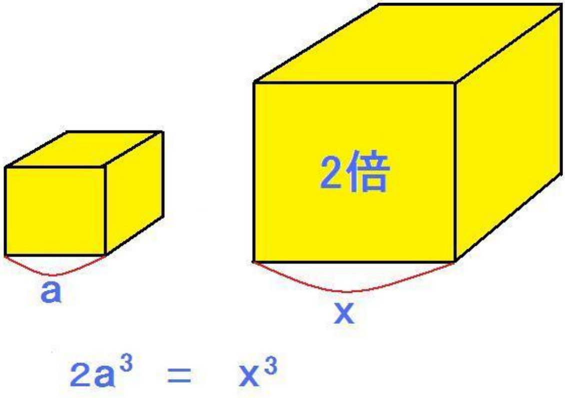


Figure: 立方体倍積問題

立方体倍積問題



の解

$$x = \sqrt[3]{2}a$$

の作図ができればよい。つまり、$\sqrt[3]{2}$ の作図ができればよい。

角の三等分問題

与えられた角の三等分角を作図せよ。

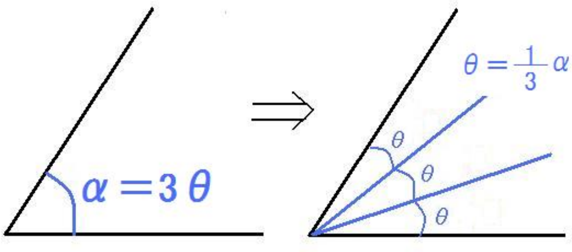


Figure: 角の三等分問題

角 $\alpha = 3\theta$ が与えられたとする。$a = \cos 3\theta$ とおいて、三角関数（cos）の 三倍角の公式$^{(*)}$ をつかうと、

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = a$$

となる。

角の三等分問題

与えられた角の三等分角を作図せよ。

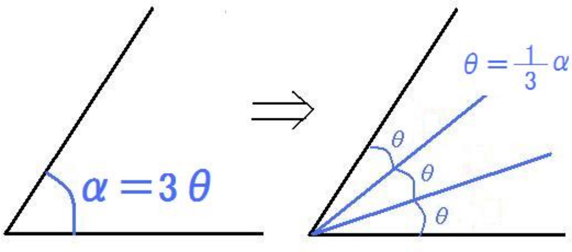


Figure: 角の三等分問題

結局、3 次方程式

$$4x^3 - 3x - a = 0$$

の解（$x = \cos\theta$）が作図できればよい。

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

答

これらのことは、定規とコンパスを用いて、「直角（垂直）が作図できる$^{(*)}$、平行線が 作図できる$^{(*)}$」ということから証明できます。

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

答

1. 数 a が与えられると、a の整数倍が作図できる。

$$2a,\ 3a,\ 4a, \cdots$$

これらのことは、定規とコンパスを用いて、「直角（垂直）が作図できる$^{(*)}$、平行線が 作図できる$^{(*)}$」ということから証明できます。

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

答

1. 数 a が与えられると、a の整数倍が作図できる。
$$2a,\ 3a,\ 4a, \cdots$$
2. 作図可能な数 a, b が与えられると、
$$a+b,\ a-b,\ ab,\ a/b \quad \text{が 作図できる}^{(*)}\text{。}$$

これらのことは、定規とコンパスを用いて、「直角（垂直）が作図できる$^{(*)}$、平行線が 作図できる$^{(*)}$」ということから証明できます。

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

答

1. 数 a が与えられると、a の整数倍が作図できる。
   $$2a,\ 3a,\ 4a, \cdots$$
2. 作図可能な数 a, b が与えられると、
   $$a+b,\ a-b,\ ab,\ a/b$$ が 作図できる$^{(*)}$。
3. 数 a が与えられると、
   $\sqrt{a}$ が作図できる。

これらのことは、定規とコンパスを用いて、「直角（垂直）が作図できる$^{(*)}$、平行線が 作図できる$^{(*)}$」ということから証明できます。

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

答

1. 数 a が与えられると、a の整数倍が作図できる。
   $$2a,\ 3a,\ 4a, \cdots$$
2. 作図可能な数 a, b が与えられると、
   $a+b,\ a-b,\ ab,\ a/b$ が 作図できる$^{(*)}$。
3. 数 a が与えられると、
   $\sqrt{a}$ が作図できる。
4. $\cos\theta$ が与えられると、
   角 θ が 作図できる$^{(*)}$。

これらのことは、定規とコンパスを用いて、「直角（垂直）が作図できる$^{(*)}$、平行線が 作図できる$^{(*)}$」ということから証明できます。

3 数学としての問題

$$AC : AD = AD : AB \;\Rightarrow\; 1 : AD = AD : AB \quad \therefore\; AD^2 = AB$$

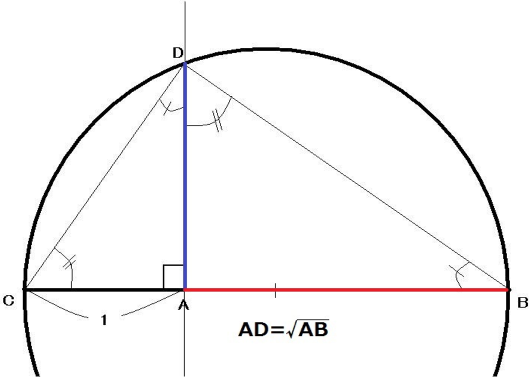


Figure: 平方根の作図

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

定理

1 が与えられると

(要するに、$+$, $-$, $\times$, $\div$ と $\sqrt{}$ で表された数が作図できるということです)

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

定理

1 が与えられると

1. 正の有理数がすべて作図できる。

(要するに、$+$, $-$, $\times$, $\div$ と $\surd$ で表された数が作図できるということです)

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

定理

1 が与えられると

1. 正の有理数がすべて作図できる。
2. 有理数の平方根（$\sqrt{\ }$）が作図できる。
   さらに、

(要するに、$+$, $-$, $\times$, $\div$ と $\sqrt{\ }$ で表された数が作図できるということです)

3 数学としての問題

問題：定規とコンパスのみで作図できる数（量）とは何か？

定理

1 が与えられると

1. 正の有理数がすべて作図できる。
2. 有理数の平方根（$\sqrt{\ }$）が作図できる。
   さらに、
3. 平方根と有理数を加減乗除した数や、その平方根が作図できる。

(要するに、$+$, $-$, $\times$, $\div$ と $\sqrt{\ }$ で表された数が作図できるということです)

3 数学としての問題

$+$, $-$, $\times$, $\div$ と $\sqrt{}$ で表された数

3 数学としての問題

$+$, $-$, $\times$, $\div$ と $\surd$ で表された数

1. $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$

3 数学としての問題

$+,\ -,\ \times,\ \div$ と $\sqrt{\ }$ で表された数

1. $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$
2. $(2+\sqrt{3})\times\sqrt{7}$

3 数学としての問題

$+,\ -,\ \times,\ \div$ と $\sqrt{\ }$ で表された数

1. $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$
2. $(2+\sqrt{3})\times\sqrt{7}$
3. $\dfrac{(2+\sqrt{3})\times\sqrt{7}}{5}$

3 数学としての問題

$+,\ -,\ \times,\ \div$ と $\sqrt{}$ で表された数

1. $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$
2. $(2+\sqrt{3})\times\sqrt{7}$
3. $\dfrac{(2+\sqrt{3})\times\sqrt{7}}{5}$
4. $\dfrac{3+\sqrt{7+\sqrt{4-\sqrt{5}}}}{(2+\sqrt{3})\times\sqrt{7}},\ \cdots$

4 三等分法

その前に

　ギリシャの三大作図問題は、およそ 3000 年後の 1800 年代に、すべて不可能であることが数学として証明されました。

円積問題

　$\sqrt{\pi}$ が作図できないことが証明されました（1882 年、リンデマン）。

立方体倍積問題と角の三等分問題

　3 乗根が作図できないことが証明されました（1837 年、バァンツェル）。

4 三等分法

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - a = 0$$

　与えられた角の三等分角を作図するには、その三分の一の角のコサインの値がわかれば作図できるのでしたが、そのコサインは、3 次方程式

$$4x^3 - 3x - a = 0$$

の解でした。

　3 次方程式の解は、3 乗根を使わなければ表現できません$^{(*)}$ので、作図不可能とわかりました。

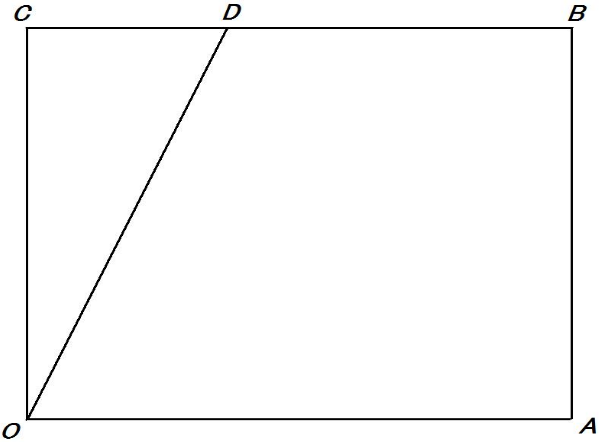
4 三等分法

しかし、
<u>古来から三等分角を作図する方法がいろいろ知られています。</u>
本日は、その中で最も近年（1980 年、阿部恒）に発見された方法を紹介します。まず、
不可能と証明されたことが、“できるとは！” どういうことか？

条件を緩めたのです＝定規とコンパスに、紙を折ること（折り紙）を許すというものです。

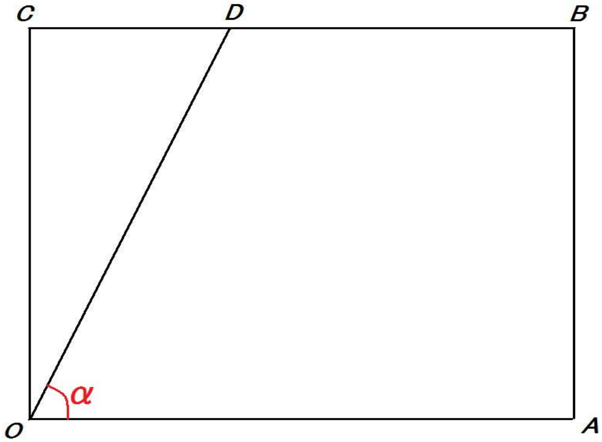
4 三等分法

三等分

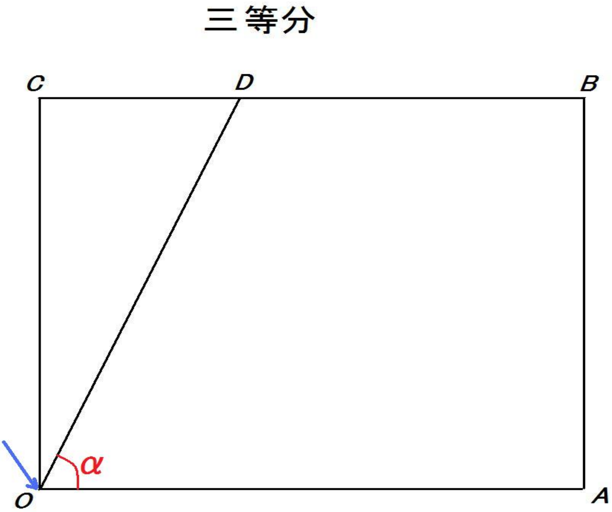


4 三等分法

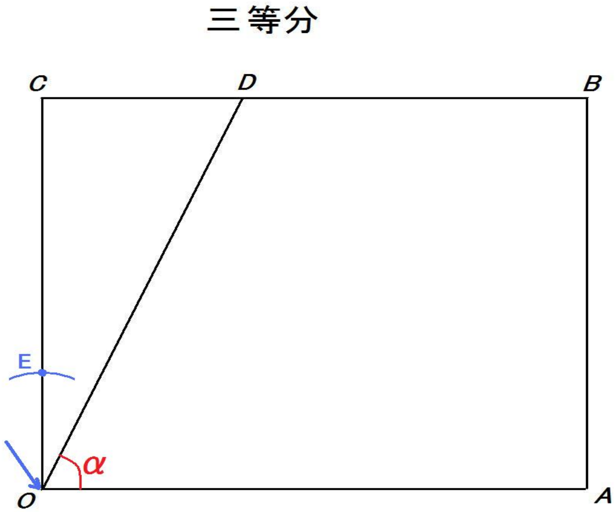
三等分



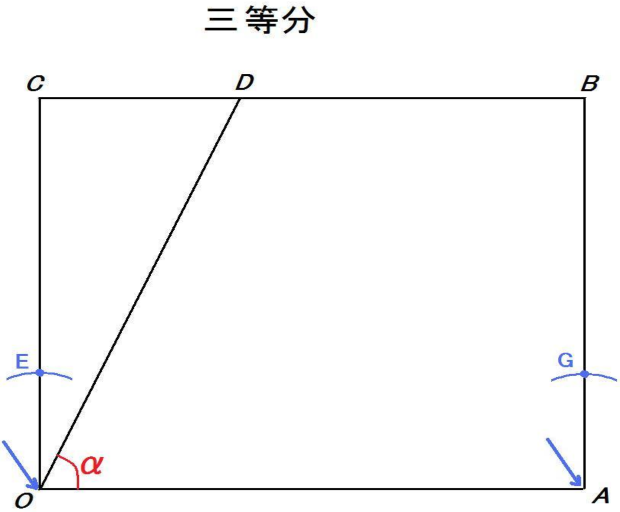
4 三等分法



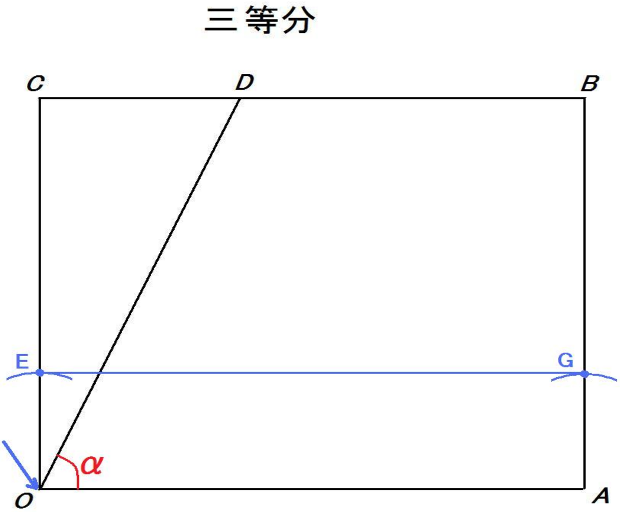
4 三等分法



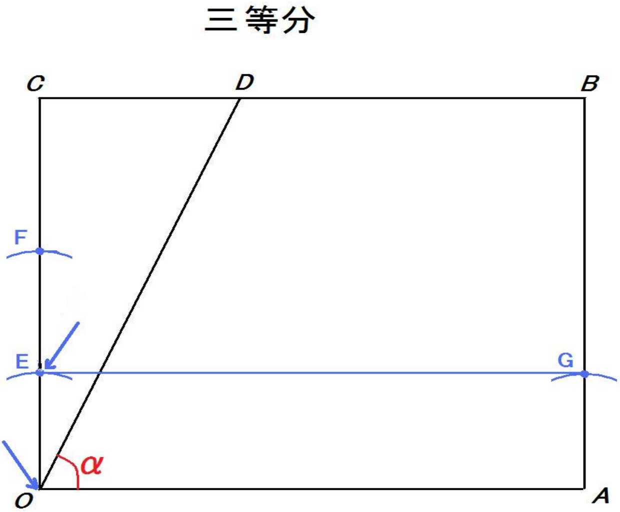
4 三等分法



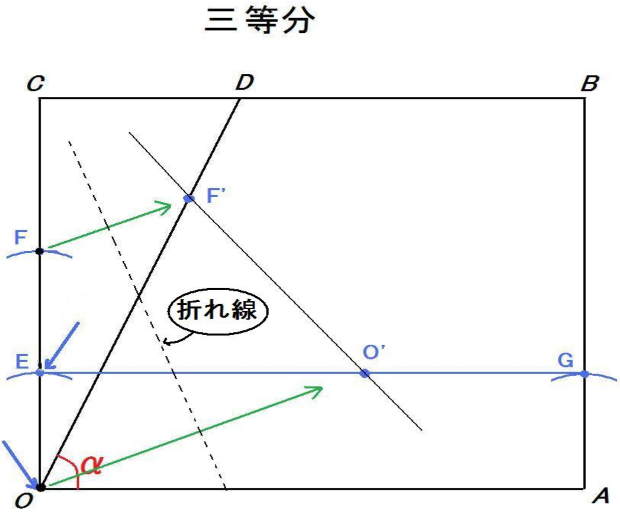
4 三等分法



4 三等分法

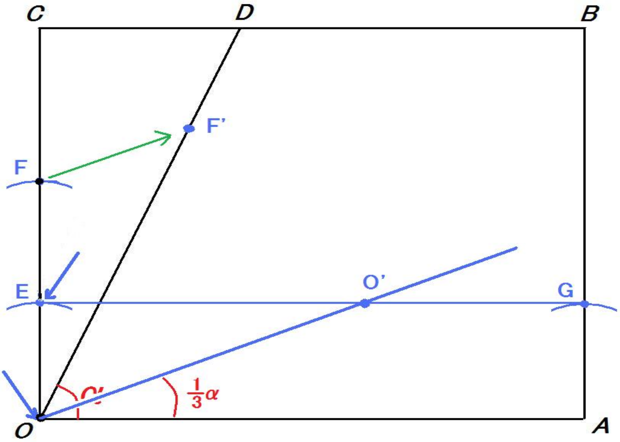


4 三等分法

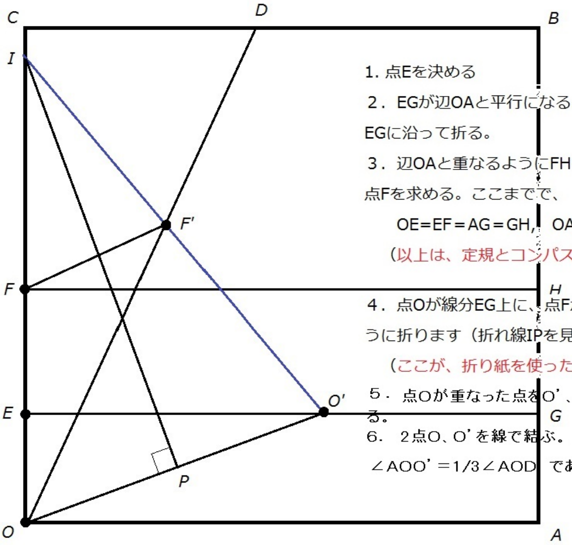


4 三等分法

三等分



4 三等分法



1. 点Eを決める

2．EGが辺OAと平行になるように紙の縦の辺を折り目EGに沿って折る。

3．辺OAと重なるようにFHを求める。特に点Oが重なる点Fを求める。ここまでで、

OE＝EF＝AG＝GH,　OA//EG//FH

（以上は、定規とコンパスのみでも行えます）

4．点Oが線分EG上に、点Fが線分OD上に同時に乗るように折ります（折れ線IPを見つける操作です）。

（ここが、折り紙を使ったところです）

5．点Oが重なった点をO’、点Fが重なった点をF’とする。

6．2点O、O’を線で結ぶ。

∠AOO’＝1/3∠AOD である。

終わりに

　従来から知られている三等分法（定規＋コンパス＋α）の中で、この方法が最も簡単で直観的です。この折り紙による三等分法の発見も絡んで、「折り紙の数学」なるものが生まれています。

“人間ができること”　と　数学

終わりに

　従来から知られている三等分法（定規＋コンパス＋α）の中で、この方法が最も簡単で直観的です。この折り紙による三等分法の発見も絡んで、「折り紙の数学」なるものが生まれています。

“人間ができること”　と　数学

1. 定規で直線を引く

終わりに

　従来から知られている三等分法（定規＋コンパス＋α）の中で、この方法が最も簡単で直観的です。この折り紙による三等分法の発見も絡んで、「折り紙の数学」なるものが生まれています。

“人間ができること”　と　数学

1. 定規で直線を引く
2. コンパスで円を描く

終わりに

　従来から知られている三等分法（定規＋コンパス＋α）の中で、この方法が最も簡単で直観的です。この折り紙による三等分法の発見も絡んで、「折り紙の数学」なるものが生まれています。

“人間ができること”　と　数学

1. 定規で直線を引く
2. コンパスで円を描く
3. 折り紙で 2 点を同時に別々の直線に載せる

終わりに

　従来から知られている三等分法（定規＋コンパス＋α）の中で、この方法が最も簡単で直観的です。この折り紙による三等分法の発見も絡んで、「折り紙の数学」なるものが生まれています。

“人間ができること”　と　数学

1. 定規で直線を引く
2. コンパスで円を描く
3. 折り紙で 2 点を同時に別々の直線に載せる
4. $\vdots$

ご清聴ありがとうございました。

本文中の（＊）を付した語句は、永野のホームページ

http://sun.ac.jp/prof/hnagano/openlecture.html

に詳しく解説しています。