3次方程式　$x^3 - px - q = 0$　の解の公式(カルダノの公式)

この3次方程式の解は、以下の3個である。

$$\left\{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{\frac{-D}{27}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}} + \frac{p}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{\frac{-D}{27}}\right)\right\}^{-\frac{1}{3}}$$

$$\omega\left\{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{\frac{-D}{27}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}} + \frac{\omega^2 p}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{\frac{-D}{27}}\right)\right\}^{-\frac{1}{3}}$$

$$\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{\frac{-D}{27}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}} + \frac{\omega p}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{\frac{-D}{27}}\right)\right\}^{-\frac{1}{3}}$$

ただし、

$$D = 4p^3 - 27q^2,\quad \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

i : 虚数単位 $i^2 = -1$,　ω : 1の立方根 $\omega^3 = 1$

一般の3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ は、$X = x + \dfrac{b}{3a}$ と未知数の変換をすると

$$X^3 - pX - q = 0$$

に変形できる。このとき、

$$p = \frac{b^2 - 3ac}{3a^2},\ q = \frac{9abc - 2b^3 - 27a^2 d}{27a^3}$$

である。