微分幾何学

相対性理論の基礎としての

県立長崎シーボルト大学　情報メディア学科

永野　哲也

アインシュタイン

- アルバート・アインシュタイン（**Albert Einstein** ）: 1879年3月14日 – 1955年4月18日　ドイツ出身
- 1905年　特殊相対性理論
- 1916年　一般相対性理論
- 1921年　ノーベル物理学賞を受賞。光量子仮説により光電効果を理論的に解明した（1905年）ことに対して

- 1879年　ドイツのウルム市生まれ。
- 1900年　チューリッヒ連邦工科大学を卒業
- 1902年　スイスの特許局に3級技術専門職として就職

ガリレイ変換

- 座標系S、座標系S’
- 一つの事件E
- E(x,y,z,t)，　E（x’,y’,z’,t’）
- S’はSに対して、x-方向に速度Vで運動している。（x-軸とx’-軸重なっている）
- Galilei変換

$$\begin{cases} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= x' + Vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{cases}$$

特殊相対性理論

- 特殊相対性原理
  - 一般の物理法則はすべての慣性系に対して同じである。
- 光速度不変の原理
  - 光の伝播はどの慣性系から観測しても同じ一定値を持つ。
    速度c＝299792.5km/s
- マイケルソン・モーレイ（Michelson-Morley）等の実験から

S から見た光の波面の方程式 $$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

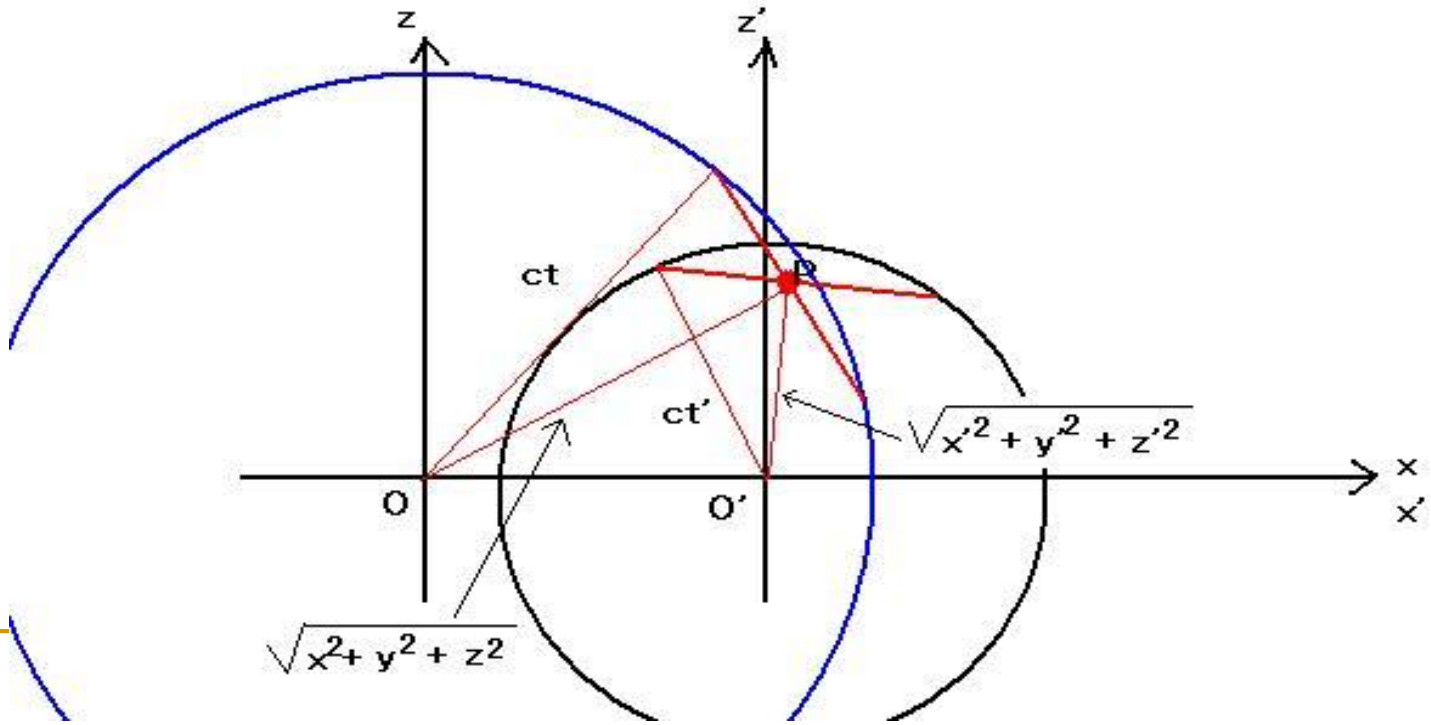
S' から見た光の波面の方程式 $$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2$$

ローレンツ不変量

- Lorentz不変量

事件E（＝ E(x,y,z,t) ＝ E（x’,y’,z’,t’））の点P（x,y,z）（＝P（x’,y’z’）
と光波面との距離が不変

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2$$



ローレンツ変換

- 物理的仮定
  SとS'は1次変換
  y' ＝y、 z' ＝z
  O'のSに対する運動　x＝Vt
  O のS'に対する運動　x' ＝－Vt
- Lorentz変換

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \mu x + \gamma t \\ \beta &= \dfrac{V}{c} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2$$

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \dfrac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta &= \dfrac{V}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \dfrac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta &= \dfrac{V}{c} \end{cases}$$

同時刻の相対性（因果関係の崩壊）

- 事件E1と事件E2が慣性系Sから見て同時（等しいｔ）に起こるとする。

  E1（x1，y1,z1,t），　E2（x2,y2,z2,t）
- S'から見ると

  E1（x'1，y'1,z'1,t'1），E2（x'2,y'2,z'2,t'2）
- ローレンツ変換から

$$t_1' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{V(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$$

動く時計の遅れ

- S'に対して静止している時計がある。その位置をx'_1とする。2つの事件がx'_1で、それぞれ時刻t'_1とt'_2で起こる。

  $E_1(x'_1, t'_1)$、 $E_2(x'_2, t'_2)$ ただし、$x'_1 = x'_2$

- E_1とE_2の固有時間間隔 $\tau = t'_2 - t'_1$
- S系から観測したE_1とE_2

  $E_1(x_1, t_1)$, $E_2(x_2, t_2)$

- ローレンツ変換から

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_1' = x_2'$$

$$t = t_2 - t_1 = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \tau = t_2' - t_1'$$

$E=mc^2$

- 運動している質点の質量 $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$
- 運動量 $$\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$
- 運動しているときの質点の全エネルギー $$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$
- 静止しているときのエネルギー $$E_0 = m_0 c^2$$

- 質量1gの物質がすべてエネルギーに変ると
  9×10^{13}J(ジュール)＝2．14× 10^{13}cal
- 2．14× 10^5t(トン)の水が100℃上昇

4次元時空

- ローレンツ不変量から

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2$$

- 4次元時空＝3次元（x、y、z）＋1次元（ct）
  この世界の事件Eは、4次元空間の1点E（ct,x,y,z）として見る。ここでは、ベクトルOEの長さを

$$OE = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

- 上記のようなベクトルの長さをローレンツ内積といい、ローレンツ内積の入った空間をミンコフスキー空間という。　　この世は4次元ミンコフスキー空間である

リーマン幾何学

- リーマン（Georg Friedrich Bernhard Riemann）1826-1866,
  就任講演(1863):　幾何学の基礎をなす仮定について
  ガウスの曲面上の幾何学をn次元へ拡張ーリーマン幾何学ー

  - n次元微分可能多様体
  - リーマン計量　基本テンソル
  - 積分による曲線の長さ
  - 測地線
  - 曲率テンソル
  - テンソル解析（絶対微分学）

n次元可微分多様体

- M^nがn次元可微分多様体であるとは
  - M^n：集合
  - 任意の点pが、n次元ユークリッド空間E^nのある開集合と位相同型な近傍をもつ。
  - 任意の点Pは、座標P（x^1、x^2、・・・、x^n）をもつ。
  - 2つの近傍が重なった点Pにおける2つの座標（座標変換）

$$(x^1, x^2, \cdots, x^n), \qquad (x'^1, x'^2, \cdots, x'^n)$$

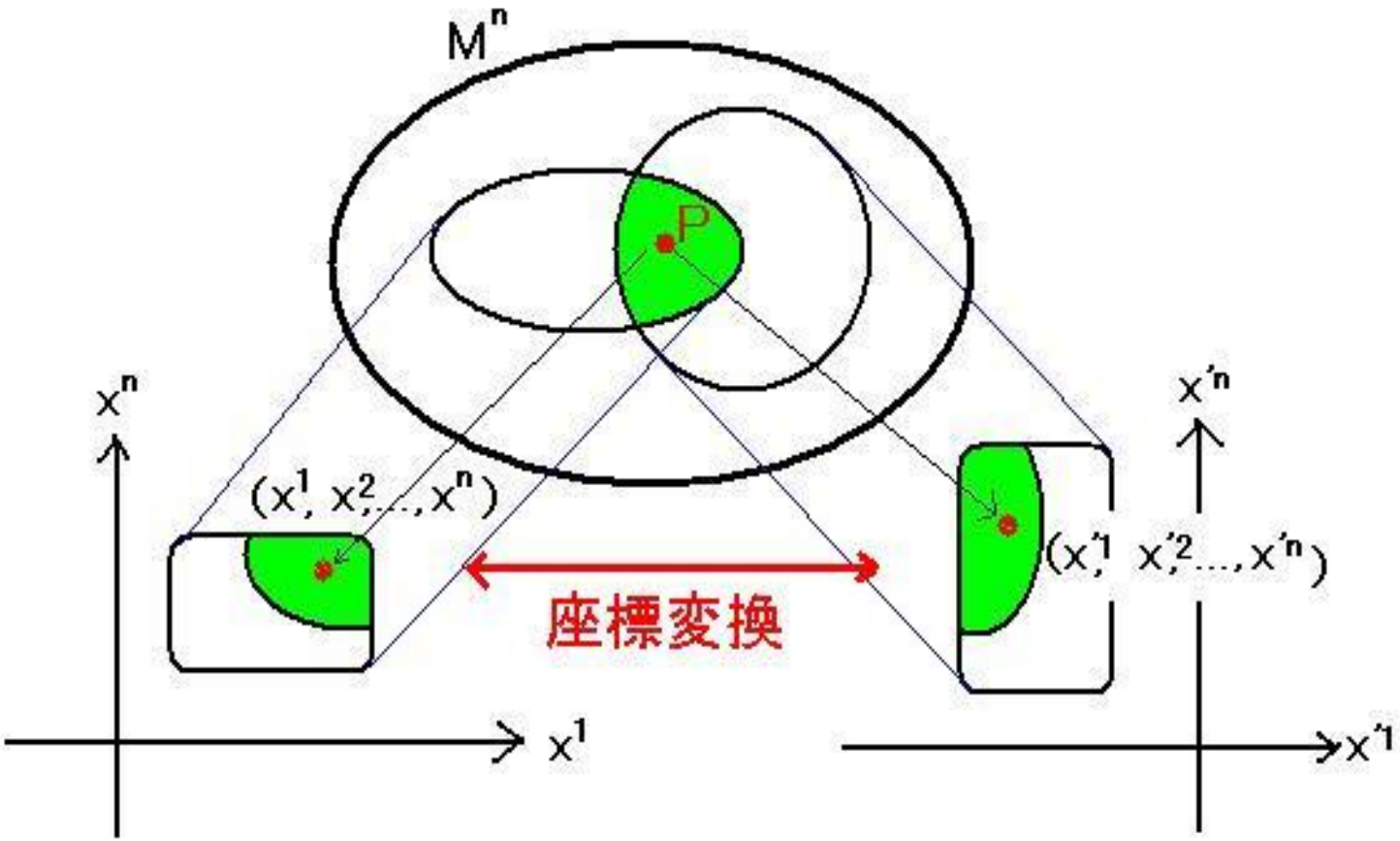
  - すべての関数に可微分の関係があり、関数行列式が0でない。

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \cdots, x^n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

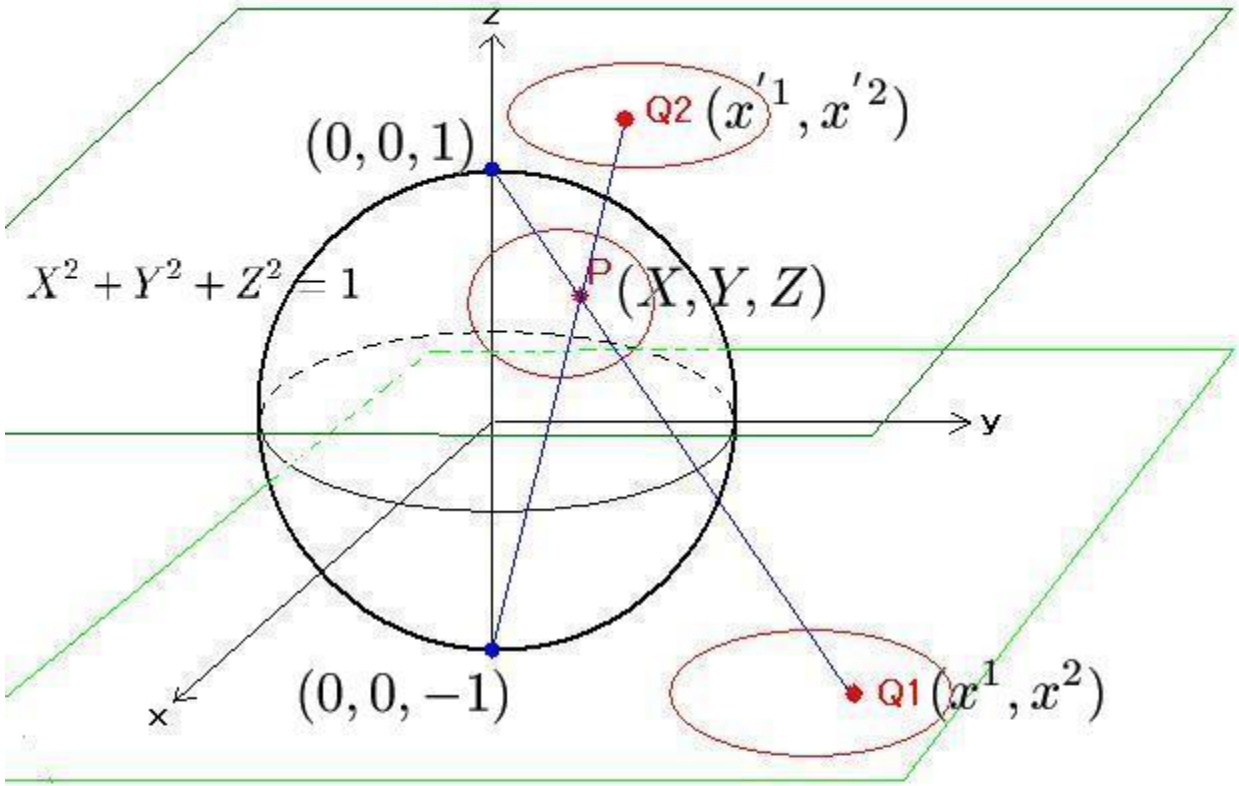
$$x^i = x^i(x'^1, x'^2, \cdots, x'^n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

座標変換のイメージ



例

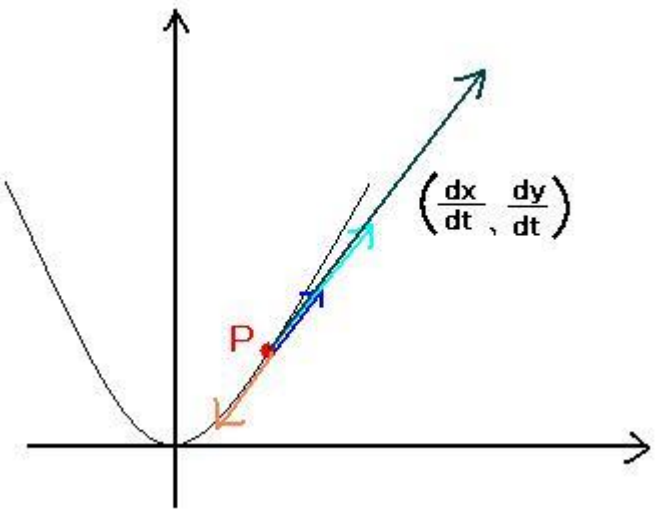


$$x'^1 = \frac{x^1}{\frac{(x^1)^2}{4} + \frac{(x^2)^2}{4}} \qquad x'^2 = \frac{x^2}{\frac{(x^1)^2}{4} + \frac{(x^2)^2}{4}}$$

$$x^1 = \frac{x'^1}{\frac{(x'^1)^2}{4} + \frac{(x'^2)^2}{4}} \qquad x^2 = \frac{x'^2}{\frac{(x'^1)^2}{4} + \frac{(x'^2)^2}{4}}$$

接空間

- 曲面に接している平面
- 多様体上の点Pを通る曲線の接ベクトルの全体を点Pにおける接空間
- 例　平面の接空間



点 $P(1,1)$ を通る放物線　$y = x^2$ を

① $x = t,\ y = t^2$ とすると

$\dfrac{dx}{dt} = 1,\ \dfrac{dy}{dt} = 2t$ となり $t = 1$ より $\dfrac{dx}{dt} = 1,\ \dfrac{dy}{dt} = 2$

② $x = 2t,\ y = 4t^2$ とすると

$\dfrac{dx}{dt} = 2,\ \dfrac{dy}{dt} = 8t$ となり $t = \frac{1}{2}$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2,\ \dfrac{dy}{dt} = 4$

③ $x = kt,\ y = k^2t^2$ とすると

$\dfrac{dx}{dt} = k,\ \dfrac{dy}{dt} = 2k^2t$ となり $t = \frac{1}{k}$ より $\dfrac{dx}{dt} = k,\ \dfrac{dy}{dt} = 2k$

リーマン計量

- 接空間（ベクトル空間）に内積を入れる
- 内積＜u ,v＞$_P$ $= \sum_{i,\ j} g_{ij}(x) u^i v^j$ $\quad u = (u^1, \cdots, u^n),\ v = (v^1, \cdots, v^n)$
  - 正値で、特に＜u ,u＞$_P$ ＝0となるのは u=0（**ゼロベクトル**）
  - 多重線形性
- リーマン計量
  - 内積＜e_i, e_j＞＝g_{ij}（x） が可微分関数のとき、リーマン計量といい、その多様体をリーマン多様体という。
- 成分関数 g_{ij}（x） は座標変換に関して

$$g'_{ij}(x') = \sum_{k,\ l} g_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}$$

テンソル代数

- 一般に座標変換に関して

$$S'_i = \sum_k S_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \qquad S'_{ij} = \sum_{k,\,l} S_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \qquad S'_{ijk} = \sum_{m,\,l,\,p} S_{mlp} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x^p}{\partial x'^k}$$

それぞれ、１階、２階、３階の共変テンソルといい、より高階の共変テンソルも同様に定義される。

$$T'^i = \sum_k T^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \qquad T'^{ij} = \sum_{k,\,l} T^{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \qquad T'^{ijk} = \sum_{m,\,l,\,p} T^{mlp} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^p}$$

それぞれ、１階、２階、３階の反変テンソルといい、より高階の反変テンソルも同様に定義され、さらにｒ階共変、ｓ階反変の混合テンソルも考えられる。この定義によれば、g_{ij} は、２階の共変テンソルである。g_{ij} を計量テンソルまたは基本テンソルという。

- 今後は、Σを省略する（アインシュタインの規約）

接続・共変微分・曲率

- 接続
  接続係数 $\left\{ {h \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$ Christoffel symboll
- 共変微分
  - テンソルの成分関数を単に微分しても、テンソルにならない。
  - 接続係数を使って、微分を変更する―共変微分―

$$\nabla_j u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop jh} \right\} u^h \qquad \nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \left\{ {h \atop ji} \right\} v_h$$

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \left\{ {h \atop ki} \right\} g_{hj} - \left\{ {h \atop kj} \right\} g_{ih}$$

- 曲率（テンソル）

$$R^h_{kji} = \frac{\partial \left\{ {h \atop ji} \right\}}{\partial x^k} - \frac{\partial \left\{ {h \atop ki} \right\}}{\partial x^j} + \left\{ {h \atop ka} \right\} \left\{ {a \atop ji} \right\} - \left\{ {h \atop ja} \right\} \left\{ {a \atop ki} \right\}$$

測地線

- リーマン多様体内の曲線 $x^i = x^i(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$
- 曲線の長さ

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,\ j} g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

- 第１変分を0とすることによりえられる微分方程式を測地線の方程式といい、その解を測地線という。

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop kl} \right\} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \qquad \text{s: 弧長}$$

ローレンツ計量・一般相対性理論

- 4次元多様体
- 接空間にローレンツ内積を入れる
- ローレンツ内積を与える2階の共変テンソルgをローレンツ計量という。
- ローレンツ計量が入った多様体をローレンツ多様体という。
- ローレンツ多様体の幾何学が一般相対性理論の数学的表現である。
- この世は、4次元ローレンツ多様体である。

重力の法則

- リッチテンソル
- 重力の法則
- ブラックホール

$$R_{kj} = R^h_{kjh} = \sum_h R^h_{kjh} \qquad \text{Ricci tensor}$$

$$R_{kj} = 0$$ アインシュタインの重力方程式

$$g_{11} = 1 - \frac{2m}{r},\ g_{22} = -\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}},\ g_{33} = -r^2,\ g_{44} = -r^2 \sin^2\theta$$

$$t = -2m \log(r - 2m) + const$$